

Atranka į EGMO 2026

2026 01 17

Uždavinys 1. Duoti realieji skaičiai a, b, c , kurie tenkina lygtis

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

1. Įrodykite, kad $ab + bc + ca = 0$.

2. Įrodykite, kad $a + b + c = 3$.

Sprendimas. Pasirašę pirmą lygtį, gauname $a + \frac{b}{c} = 1$, taigi $ac + b = c$, analogiškai $ab + c = a$, $bc + a = b$. Sudėję šias tris lygtis iškart gauname $ab + ac + bc = 0$. Sudėję tris duotas lygtis, gauname

$$a + b + c + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} = 3.$$

Vadinasi, mums reikia įrodyti, kad $\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} = 0$, taigi $ab^2 + bc^2 + a^2c = 0$.

Pasidauginę lygtis $ac + b = c$, $ab + c = a$, $bc + a = b$ iš atitinkamai a, b, c ir sudėję tris gautas lygtis, būtent tai ir gauname. $\square$

Uždavinys 2. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AD ir BC taip atitinkamai padėti taškai M ir N , kad $AM = BN$. X yra toks taškas ant kraštinės AN , kad DX statmena AN . Įrodykite, kad kampas MXC yra status.

Sprendimas. Žinome, kad apie keturkampį $DXNC$ galime apibrėžti apskritimą (nes kampai X ir C yra statūs). Bet taip pat apie keturkampį $DMNC$ galime apibrėžti apskritimą (nes jis stačiakampis). Tai yra tas pats apskritimas (apibrėžtas apie trikampį DNC). Vadinasi apie keturkampį $DMXC$ galima apibrėžti apskritimą ir todėl MXC status (priešingų kampų suma yra 180°). $\square$

Uždavinys 3. Alisa ir Bobas žaidžia žaidimą. Iš pradžių jie stovi prie tuščios lentos. Tada paeiliui (pradedą Alisa) jie išsirenka ir ant lentos rašo po vieną iš skaičių $1, 2, \dots, 2025$. Skaičius ant lentos gali būti parašytas daugiausiai vieną kartą. Žaidėjas pralaimi žaidimą, jei po jo ėjimo visų ant lentos parašytų skaičių sandauga dalinasi iš 2025. Kuris žaidėjas laimės, jei ir Alisa, ir Bobas žaidžia optimaliai?

Sprendimas. Laimės Alisa. Pirmu ėjimu ji parašys 675. Tada žaidėjas, kuris parašys bet kokį 3 kartotinį, pralaimės. Bet skaičių, nedalių iš 3 yra $\frac{2025+2}{3} = 1350$ - lyginis skaičius. Kiekvienas žaidėjas (pradės Bobas, nes dabar jo eilė) rašys vieną iš jų. Taigi, pirmasis, priverstas parašyti skaičių, dalų iš 3, bus Bobas ir jis pralaimės. $\square$

Uždavinys 4. Natūralųjį skaičių n vadiname *puikiu*, jei jis turi bent 4 teigiamus daliklius ir keturių mažiausių teigiamų n daliklių kvadratų suma yra lygi n . Raskite visus puikius skaičius.

Sprendimas. Visų pirma, jei n būtų nelyginis, jo keturi mažiausi dalikliai visi nelyginiai, taigi jų kvadratų suma lyginė, prieštara. Vadinasi, n lyginis, taigi jo du mažiausi dalikliai yra 1 ir 2. Jei n dalus iš 4, tai 4 yra trečias arba ketvirtas mažiausias daliklis, bet tada likusio kvadratas yra $3 \pmod 4$, kas yra neįmanoma. Taigi, n nedalus iš 4.

Žinome, kad $n = 1 + 4 + a^2 + b^2$, kur a ir b yra atitinkamai trečias ir ketvirtas mažiausi n dalikliai. Iš karto žinome, kad jie skirtingų lyginumų, taigi $a = p$, $b = 2p$ su kažkokiu pirminiu p . Vadinasi, $n = 5(1 + p^2)$. Gauname, kad n dalus iš 5, taigi $p = 5$, $n = 130$. $\square$

Laikas: 4 val. 00 min.
Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.
Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.