EGMO 2025 stovykla
Geometrija

Deividas Morkūnas

Uždavinys 1. Let $\triangle ABC$ be an acute triangle with orthocenter H. Line BH intersects the circumcircle of $\triangle ABC$ again at D. Prove that AC divides HD in half.

Uždavinys 2. Let AD and BE be the altitudes of $\triangle ABC$, intersecting at the orthocenter H. Denote the midpoints of segments AB and CH as X and Y, respectively. Prove that the line XY is perpendicular to the line DE.

Uždavinys 3. ABC is a triangle of area 4 with circumcenter O and M is the midpoint of AO. We choose the points P, Q on the sides AB and AC respectively such that M is at PQ and segments BC and PQ are parallel. Suppose the area of the triangle APQ is 1. Calculate the angle BAC.

Uždavinys 4. Inside parallelogram $ABCD$ is point P, such that $PC = BC$. Show that line BP is perpendicular to line which connects middles of sides of line segments AP and CD

Uždavinys 5. Let ABC be an acute triangle. Let D be a point on the line parallel to AC that passes through B, such that $\angle BDC = 2\angle BAC$ as well as such that $ABDC$ is a convex quadrilateral. Show that $BD + DC = AC$.

Uždavinys 6. Let $ABCD$ be a square. Let M and K be points on segments BC and CD respectively, such that $MC = KD$. Let P be the intersection of the segments MD and BK. Prove that AP is perpendicular to MK.

Uždavinys 7. We are given a semicircle k with center O and diameter AB. Let C be a point on k such that $CO \perp AB$. The bisector of $\angle ABC$ intersects k at point D. Let E be a point on AB such that $DE \perp AB$ and let F be the midpoint of CB. Prove that the quadrilateral $EFCD$ is cyclic.

Uždavinys 8. Inside the parallelogram $ABCD$, point E is chosen, such that $AE = DE$ and $\angle ABE = 90^o$. Point F is the midpoint of the side BC . Find the measure of the angle $\angle DFE$.

Uždavinys 9. Let $\triangle ABC$ be an acute triangle with orthocenter H. The circle Γ with center H and radius AH meets the lines AB and AC at the points E and F respectively. Let E', F' and H' be the reflections of the points E, F and H with respect to the line BC, respectively. Prove that the points A, E', F' and H' lie on a circle.

Uždavinys 10. Let ABC be a non-right isosceles triangle such that $AC = BC$. Let D be such a point on the perpendicular bisector of AB, that AD is tangent on the ABC circumcircle. Let E be such a point on AB, that CE and AD are perpendicular and let F be the second intersection of line AC and the circle CDE. Prove that DF and AB are parallel.

Uždavinys 11. We are given a triangle ABC such that $\angle BAC < 90°$. The point D is on the opposite side of the line AB to C such that $AD = BD$ and $\angle ADB = 90°$. Similarly, the point E is on the opposite side of AC to B such that $AE = CE$ and $\angle AEC = 90°$. The point X is such that $ADXE$ is a parallelogram. Prove that $BX = CX$.

Uždavinys 12. Let A, B, C, D, E be five points on a circle such that $|AB| = |CD|$ and $|BC| = |DE|$. The segments AD and BE intersect at F. Let M denote the midpoint of segment CD. Prove that the circle of center M and radius ME passes through the midpoint of segment AF.

EGMO 2025 stovykla
Algebra - nelygybės

Greta Morkūnė

2025-01-18

Vidurkiai teigiamiems skaičiams $x_1, x_2, ..., x_n$:
Aritmetic mean: $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$;
Geometric mean: $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$;
Quadratic mean: $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+..+x_n^2}{n}}$;
Harmonic mean: $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$.
$QM \geq AM \geq GM \geq HM$. Jei viena iš nelygybių yra lygybė, tada $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Tada visos nelygybės yra lygybės.

Cauchy-Swartz nelygybė: Jei $x_1, x_2, ...x_n$ ir $y_1, y_2, ..., y_n$ yra teigiami, tada galioja

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)^2$$

.

Lygybė galioja tada ir tik tada, jei $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$.

Jei duota, kad a, b, c yra trikampio kraštinės, dažnas keitinys yra $a = x + y, b = x + z, c = y + z$, tada žinome, kad $x, y, z > 0$.

Uždaviniai:

Uždavinys 1. Įrodykite, kad su visais teigiamais realiaisiais skaičiais a, b teisinga nelygybė

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

.

Uždavinys 2. Įrodykite, kad jeigu $0 \leq x, y, z \leq 1$, tai

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+x^3+z^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leq \frac{1}{3}.$$

Kada galioja lygybė?

Uždavinys 3. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais a, b teisinga nelygybė

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{3} \geq \frac{a^3b+ab^3}{2}.$$

Kada galioja lygybė?

Uždavinys 4. Įrodykite, kad su visais teigiamais realiaisiais skaičiais a, b, c teisinga nelygybė

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Kada galioja lygybė?

Uždavinys 5. Įrodykite, kad su visais teigiamais realiaisiais skaičiais a, b, c teisinga nelygybė

$$ab^3 + bc^3 + ca^3 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

Kada galioja lygybė?

Uždavinys 6. Įrodykite, kad jeigu $a, b, c \geq 1$, tai

$$3abc + a + b + c \geq 2(ab + ac + bc).$$

Kada galioja lygybė?

Uždavinys 7. Įrodykite, kad jeigu $a, b, c \geq 0$ ir $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, tai

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Kada galioja lygybė?

Uždavinys 8. Įrodykite, kad su visais teigiamais realiaisiais skaičiais a, b, c teisinga nelygybė

$$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}.$$

Kada galioja lygybė?

Uždavinys 9. Duota, kad $x, y, z > 0$ ir $\frac{1}{3} \leq xy + xz + yz \leq 3$. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti xyz? Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti $x + y + z$?

Uždavinys 10. Skaičiai $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ir $x_1x_2...x_n = c^n$. Įrodykite, kad

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \geq (1 + c)^n,$$

kai $n = 2$, $n = 3$ ir $n = 4$.

Uždavinys 11. Skaičiai $x, y, z > 0$. Raskite didžiausią reiškinio

$$\frac{xyz}{(1 + x)(x + y)(y + z)(z + 16)}$$

reikšmę.

Uždavinys 12. Skaičiai $a, b, c, d > 0$. Įrodykite, kad

$$\frac{abc + abd + acd + bcd}{4} \leq (\frac{a + b + c + d}{4})^3.$$

Uždavinys 13. Skaičiai $a, b, c > 0$ ir $a + b + c = 1$. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - c} \geq \frac{2}{1 + a} + \frac{2}{1 + b} + \frac{2}{1 + c}.$$

Uždavinys 1. Kiekvieniems natūraliesiems skaičiams n ir k, vadinkime n $k-geru$ jeigu egzistuoja tokie neneigiami sveikieji skaičiai $a_1, \ldots, a_k$, kad

$$n = a_1^2 + a_2^4 + a_3^8 + \ldots + a_k^{2^k}.$$

Ar egzistuoja toks natūralusis skaičius k, kad visi natūralieji skaičiai yra $k - geri$?

Uždavinys 2. Tegul $a, d > 1$ yra tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai. Tegul $x_1 = 1$, ir kiekvienam $k \geq 1$, pažymėkime

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + d & \text{if } a \text{ does not divide } x_k \\ x_k/a & \text{if } a \text{ divides } x_k \end{cases}$$

Kiekvienai porai a ir d, raskite didžiausią tokį natūralųjį skaičių n, kuriam egzistuoja koeficientas k, kuriam x_k yra dalus iš a^n.

Uždavinys 3. Du skirtingus natūraliuosius skaičius n, m vadinkime *draugais* jeigu $|n - m|$ dalo n ir m. Įrodykite, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui k, egzistuoja k tokių skirtingų natūraliųjų skaičių, kad bet kurie du iš jų yra draugai.

Uždavinys 4. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), kuriems galioja

$$a! + b! = c!!$$

(čia $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)$ ir $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)$)

Uždavinys 5. Natūralusis skaičius vadinamas *labai kvadratiniu*, jeigu jo skaitmenų suma (dešimtainėje sistemoje) yra kvadratas. Pavyzdžiui, 13 yra labai kvadratinis skaičius, nes $1 + 3 = 2^2$, bet 16 nėra labai kvadratinis.

Parodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų skaičių, kurie negali būti užrašyti kaip dviejų labai kvadratinių skaičių suma.

Uždavinys 6. Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras (m, n), kad $n^4 \mid 2m^5 - 1$ ir $m^4 \mid 2n^5 + 1$.

Uždavinys 1. Įrodykite, kad $30|n^5 - n$.

Uždavinys 2. Įrodykite, kad jei $3|a^2 + b^2$, tai $3|a$ ir $3|b$.

Uždavinys 3. Raskite visus pirminius p ir q tenkinančius lygybę $p^2 - 2q^2 = 1$.

Uždavinys 4. Įrodykite, kad $10^n + 45n - 1$ dalijasi iš 27.

Uždavinys 5. Raskite visus pirminius skaičius p, su kuriais $11 + p^2$ turi ne daugiau nei 11 daliklių.

Uždavinys 6. Įrodykite, kad jei p pirminis, tai $(a+b)^p \equiv a^p + b^p (mod\, p)$

Uždavinys 7. Raskite sveikuosius skaičius, kurie yra tarpusavyje pirminiai su visais sekos $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ nariais.

Uždavinys 8. Kiek natxraliųjų sprendinių (x, y) turi lygtis $x^4 + y^3 = z! + 7$?

Uždavinys 1. Kiekviename kvadratinio 2025×2025 sodo langelyje pradžioje yra nulinio aukščio medis. Sodininkas ir medkirtys paeiliui atlieka ėjimus žaisdami žaidimą (pradeda sodininkas):
* Sodininkas išsirenka langelį. Medis jame ir aplinkiniuose (įskaitant įstrižus kaimynus) langeliuose paauga vienu aukščio vienetu.
* Medkirtys išsirenka keturis lentos langelius ir sumažina jų medžių aukščius vienu aukščio vienetu.
Medį vadiname *didingu* jeigu jo aukštis yra bent 10^6. Raskite didžiausią tokį skaičių K, kuriam sodininkas gali užtikrinti, kad galiausiai ant lentos bus bent K didingų medžių, nepriklausomai nuo medkirčio pasirinkimų.

Uždavinys 2. Duotas natūralusis skaičius n. Pradedant nuo n krūvelių po vieną akmenuką, galima atlikti šį veiksmą: pasirinkus dvi krūveles, iš abiejų paimamas vienodas skaičius akmenukų, ir iš jų visų sudaroma nauja krūvelė. Kiekvienam n, raskite mažiausią galimą krūvelių skaičių, pasiekiamą kažkokia tokių veiksmų seka.

Uždavinys 3. Plokštumoje nubrėžti $2n$ spinduliai, kur n yra natūralusis skaičius. Duota, kad jokie du spinduliai neturi to paties pradžios taško, ir visų spindulių kryptys skirtingos. Įrodykite, kad galima nubrėžti tiesę, kertančią lygiai n spindulių ir nekertančią nė vieno spindulio pradžios taško.

Uždavinys 4. Duota $n \geq 2$ taškų ant apskritimo. A ir B žaidžia žaidimą. Pradžioje ant vieno iš taškų padedama šaškė. Žaidėjai paeiliui kilnoja šaškę iš vieno taško į kitą, taip pat nubrėždami atkarpą tarp tų taškų. Jeigu atkarpa tarp taškų jau nubrėžta, šaškė tarp tų taškų judėti negali. A visada pradeda, ir pralaimi žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Kiekvienam n, kuris žaidėjas turi laiminčią strategiją?

Uždavinys 5. Duota $n \times n$ lentelė, kur $n \geq 1$. Jonas nori nuspalvinti k langelių taip, kad egzistuotų lygiai vienas būdas išdėlioti n akmenėlių ant nuspalvintų langelių, nededant po daugiau nei vieną akmenėlį į bet kurią eilutę ar stulpelį. Kokiam didžiausiam k Jonas gali tą padaryti?

Uždavinys 6. Aistė turi susikurti n simbolių ilgio slaptažodį prisijungimui prie SODRA puslapio. Jis gali būti sudarytas iš 27 skirtingų ženklų:

$$A, B, C, ..., Y, Z, \#$$

Slaptažodį vadiname *pertekliniu*, jei galime pasirinkti keletą iš eilės einančių simbolių slaptažodyje ir juos nuspalvinti raudonai ir mėlynai taip, kad gauta raudona ir mėlyna frazės sutaptų. Pavyzdžiui, slaptažodis $H\#ZBZJBJZ$ yra perteklinis, nes jame yra frazė $ZBZJBJ$, sudaryta iš dviejų frazės ZBJ kopijų. Atitinkamai, pat slaptažodis $ABCACB$ nėra perteklinis. Įrodykite, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geq 1$ egzistuoja bent 18^n ilgio n slaptažodžių, kurie nėra pertekliniai.

Uždavinys 1. Turime standartinę 8×8 šachmatų lentą. Vienu ėjimu galima perdažyti visus langelius arba (a) eilutėje arba stulpelyje arba (b) 2×2 kvadrate. Ar įmanoma tokiais perdažymais gauti lentą su vienu juodu langeliu?

Uždavinys 2. Stačiakampės grindys padengtos 2×2 ir 1×4 plytelėmis. Viena iš jų sudužo, bet turime atliekamą kitos rūšies plytelę. Įrodykite, kad su šiuo rinkiniu grindų padengti neįmanoma.

Uždavinys 3. Ar galima sudėlioti stačiakampį iš penkių skirtingų tetrominų? (pavaizduotų žemiau)

Uždavinys 4. Ar galima padengti 10×10 lentelę 25 T-formos tetrominomis?

Uždavinys 5. Ar galima padengti 8×8 lentelę 15 T-formos ir viena kvadratine tetromina?

Uždavinys 6. Ar galima padengti 10×10 lentelę 25 1×4 plytelėmis?

Uždavinys 7. Duota $n \times n$ formos lentelė su pašalintais kampais. Kokiems n ją galima padengti L-formos tetrominomis?

Uždavinys 8. Ar įmanoma užpildyti $10 \times 10 \times 10$ dėžę su 250 $1 \times 1 \times 4$ kaladėlėmis?