

RMM 2025 TST

Diena 1

2024.12.18

Uždavinys 1. Duotas toks smailus trikampis ABC , kad $AB < AC$. Taškai D , E ir F yra atitinkamai kraštinių BC , CA ir AB vidurio taškai. Taškas X yra $\triangle BDF$ viduje ir $\triangle XBD \sim \triangle XFB$. Taškas Y yra $\triangle DCE$ viduje ir $\triangle YEC \sim \triangle YCD$. Įrodykite, kad tiesė BC yra apie $\triangle DXY$ apibrėžto apskritimo liestinė.

Uždavinys 2. Skaičius $n \geq 2$ yra natūralusis. Teigiami realieji skaičiai $x_1, x_2, \dots, x_n$ tenkina lygybę $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Įrodykite, kad

$$\{x_1\} + \{x_2\} + \dots + \{x_n\} < n - \frac{1}{2}.$$

Pastaba. $\{x\}$ yra skaičiaus x trupmeninė dalis, taigi $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Uždavinys 3. Skaičiai m ir n yra natūralieji. Gauja, sudaryta iš n plėšikų, pavogė maišą šokoladų iš Jane Street. Maiše buvo m vienodų šokoladų. Su kuriais m ir n yra įmanoma padalinti visą šokoladą po lygiai visiems plėšikams (t.y, kiekvienas plėšikas turi gauti tokį patį kiekį šokolado), jei leidžiama kiekvieną šokoladą perpjauti į dvi (nebūtinai lygias) dalis?

Uždavinys 4. Skaičius $d \geq 2$ yra natūralusis. Duota tokia natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \dots$, kad $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_d = d$ ir a_n yra mažiausias natūralus skaičius, kuris nesutampa nė su vienu iš $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ir tenkina $\text{dbd}(a_{n-1}, a_n) \geq d$ visiems $n \geq d + 1$. Įrodykite, kad kiekvienam pirminiui p , egzistuoja toks n , kad p dalo a_n .

Laikas: 4 valandos ir 30 minučių

Kiekvienas uždavinys vertas 7 tašky

Klausimų galima klausti pirmas 30 minučių

Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės

RMM 2025 TST

Diena 2

2024.12.19

Uždavinys 5. Turime 10×10 lentą, kur kai kuriuose langeliuose taip pastatomi žirgai, kad bet kuriame 2×2 kvadrato yra bent vienas žirgas. Koks mažiausias langelių skaičius, kuriuos kerta bent vienas žirgas? (Laikoma, kad žirgas nekerta savo langelio, bet kerta langelius, kurie tušti arba kuriuose stovi kitas žirgas pagal įprastas šachmatų taisykles.)

Uždavinys 6. Plėšikų gauja pavogė maišą monetų iš Jane street. Kiekviena moneta verta sveiko skaičiaus centų. Yra žinoma, kad jei bet kuri viena moneta būtų išimta iš maišo, tai likusios monetos gali būti padalintos plėšikams po lygiai (t.y. jie visi gali taip pasidalinti monetas, kad kiekvienas turės monetų, vertų po tiek pat centų). Įrodykite, kad jei viena moneta būtų išimta iš maišo, tai likusių monetų skaičius dalus iš plėšikų skaičiaus.

Uždavinys 7. Duotas smailus trikampis ABC , kampų $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ vidinės pusiauakampinės kerta atitinkamai BC , CA , AB atitinkamai taškuose D , E , F . Taškai P , Q , R yra atitinkamai atkarpų AD , BE , CF vidurio taškai. Įrodykite, kad trikampio PQR aukštinių susikirtimo taškas, trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas ir apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras yra vienoje tiesėje.

Uždavinys 8. Duota, kad $\mathbb{N}$ žymi natūraliuosius skaičius ir $k \in \mathbb{N}$. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kad

$$f^x(y) + f^y(x) = k(x + y)$$

visiems $x, y \in \mathbb{N}$.

Pastaba. $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{f \text{ pritaikytas } n \text{ kartų}}.$

Laikas: 4 valandos ir 30 minučių

Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų

Klausimų galima klausti pirmas 30 minučių

Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės