Algebros Olimpiada
2026 m. vasario 14 d.

Uždavinys 1. Tegu funkcija $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ bei skaičius $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ yra tokie, kad

$$f\left(\frac{x}{y} + y\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + \alpha x$$

galioja visiems $x, y \in \mathbb{Q}^+$.
a) Įrodykite, kad $f(x) = x^2$ visiems $x \in \mathbb{N}$.
b) Įrodykite, kad $f(x) = x^2$ visiems $x \in \mathbb{Q}^+$.
Pastaba: $\mathbb{Q}^+$ *ir* $\mathbb{N}$ *žymi atitinkamai teigiamųjų racionaliųjų ir natūraliųjų skaičių aibes.*

Sprendimas. Įsistatę $y = x$ ir $y = 1$, atitinkamai gauname

$$f(x+1) = 1 + f(x) + \alpha x, \tag{1}$$

ir

$$f(x+1) = \frac{f(x)}{f(1)} + f(1) + \alpha x. \tag{2}$$

Sulyginę (1) ir (2), gauname

$$f(x)\left(1 - \frac{1}{f(1)}\right) = f(1) - 1.$$

Kadangi pagal (1) funkcija f negali būti konstantinė, gauname $f(1) = 1$. Taikydami indukciją, gauname

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}x(x-1) + x \qquad \text{visiems } x \in \mathbb{Z}^+. \tag{3}$$

Iš to seka, kad $f(2) = \alpha + 2$ ir $f(4) = 6\alpha + 4$. Įstatę $x = 4$ ir $y = 2$ į funkcinę lygtį, gauname

$$\alpha^2 - 2\alpha = 0.$$

Taigi, norint gauti sprendinius, būtinai $\alpha = 2$. Toliau nagrinėsime tik šį atvejį.
Iš (3) gauname, kad $f(x) = x^2$ visiems $x \in \mathbb{Z}^+$. Taikant indukciją, kai $x \in \mathbb{Q}^+$ ir $n \in \mathbb{Z}^+$, iš $f(x+n) = (x+n)^2$ seka, kad $f(x) = x^2$.
Tegu dabar $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$, kur $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Įsistatę $x = a$ ir $y = b$, gauname

$$f\left(\frac{a}{b} + b\right) = \frac{a^2}{b^2} + b^2 + 2a = \left(\frac{a}{b} + b\right)^2.$$

Iš to seka, kad

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Lengva patikrinti, kad funkcija $f(x) = x^2$ iš tiesų tenkina duotąją funkcinę lygtį.
Taigi, kai $\alpha \neq 2$, sprendinių nėra, o vienintelis sprendinys, kai $\alpha = 2$, yra

$$f(x) = x^2.$$

□

Uždavinys 2. Kiekvienam realiajam skaičiui x apibrėžkime $\lfloor x \rfloor$ kaip didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x, ir apibrėžkime $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

(a) Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug teigiamų realiųjų skaičių x, tenkinančių nelygybę

$$\{x^2\} - \{x\} > \frac{2025}{2026}.$$

(b) Įrodykite, kad šios nelygybės netenkina joks teigiamas realusis skaičius $x < 1000$.

Sprendimas. (a) Parodysime, kad $x = n + \frac{1}{n+1}$ tenkina nelygybę pakankamai dideliems teigiamiems sveikiesiems skaičiams n. Apskaičiuokime

$$\begin{aligned}\{x^2\} - \{x\} &= \left\{n^2 + \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right\} - \left\{n + \frac{1}{n+1}\right\} \\ &= \left\{n^2 + 2 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right\} - \frac{1}{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &> 1 - \frac{3}{n+1}.\end{aligned}$$

Todėl $x = n + \frac{1}{n+1}$ tenkina nelygybę, kai n yra teigiamas sveikasis skaičius toks, kad

$$1 - \frac{3}{n+1} > \frac{2025}{2026} \Leftrightarrow n > 3 \cdot 2026 - 1,$$

kas galioja pakankamai dideliems n. Vadinasi, egzistuoja be galo daug teigiamų realiųjų skaičių x, tenkinančių nelygybę.

(b) Tegu $x = a + b$, kur $a = \lfloor x \rfloor$ ir $b = \{x\}$, ir panagrinėkime šias nelygybes:

$$\{x^2\} - \{x\} > \frac{2025}{2026} \ \Rightarrow\ 1 - b > \frac{2025}{2026} \ \Rightarrow\ b < \frac{1}{2026}.$$

Dabar, naudodami $b < \frac{1}{2026}$, gauname

$$\begin{aligned}\{x^2\} - \{x\} > \frac{2025}{2026} &\Rightarrow \{(a+b)^2\} = \{2ab + b^2\} > \frac{2025}{2026} \\ &\Rightarrow 2ab + b^2 > \frac{2025}{2026} \\ &\Rightarrow a > \frac{2025}{2026} \cdot \frac{1}{2b} - \frac{b}{2} > \frac{2025}{2026} \cdot \frac{2026}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2026} > 1000.\end{aligned}$$

Taigi, neegzistuoja nė vienas teigiamas realusis skaičius $x < 1000$, tenkinantis šią nelygybę.

$\square$

Uždavinys 3. Skaičiai $1, 2, \ldots, n$ surašyti tam tikra tvarka: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (kiekvienas skaičius užrašytas lygiai vieną kartą). Skaičius

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}}$$

yra racionalus. Nustatykite visas galimas natūraliąsias skaičiaus n reikšmes.

Sprendimas. Apibrėžkime

$$b_i = \sqrt{a_i + \sqrt{a_{i+1} + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tada

$$b_{i+1} = b_i^2 - a_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Kadangi pagal sąlygą b_1 yra racionalus, indukcija iš lygybės $b_{i+1} = b_i^2 - a_i$ gauname, kad $b_2, b_3, \dots, b_n$ taip pat yra racionalūs.
Kadangi $b_n = \sqrt{a_n}$ yra racionalus ir yra sveikojo skaičiaus šaknis, tai b_n yra sveikasis skaičius. Taikydami tą patį argumentą atgal (indukcija nuo n į 1), gauname, kad visi skaičiai $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ taip pat yra sveikieji.
Akivaizdu, kad $n = 1$ tinka su $a_1 = 1$. Toliau tarkime $n \geq 2$. Tegu $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$ kokiam nors $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tarkime, kad $k \geq 2$. Tuomet

$$b_n = \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n} < k + 1 < 2k,$$

vadinasi

$$b_i = \sqrt{a_i + b_{i+1}} < \sqrt{n + 2k} < 2k \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

kur paskutinė nelygybė teisinga, nes iš $n \leq k^2 + 2k$ seka $n + 2k \leq k^2 + 4k < 4k^2$ kai $k \geq 2$. Bet kadangi $a_1, a_2, \dots, a_n$ yra permutacija skaičių $1, 2, \dots, n$, tai $a_j = k^2$ kokiam nors $j \neq n$. Tuomet iš $b_j^2 = a_j + b_{j+1}$ gauname

$$k^2 < b_j^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2.$$

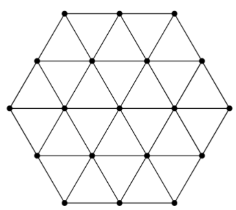
Vadinasi b_j^2 yra sveikasis skaičius, esantis griežtai tarp dviejų gretimų pilnųjų kvadratų k^2 ir $(k+1)^2$, kas neįmanoma. Prieštara rodo, kad $k \geq 2$ negalima.
Taigi $k = 1$, t. y.$2 \leq n \leq 4$. Tiesiogiai patikrinus šiuos atvejus įsitikiname, kad tinka tik $n = 3$, pavyzdžiui su $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 1)$.
Atsakymas: $\boxed{n = 1, 3}$

□

Laikas: 4 val. 00 min.
Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.
Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.

Kombinatorikos Olimpiada
2026 m. vasario 15 d.

Uždavinys 1. Žemiau pateiktame paveiksle pavaizduota šešiakampė gardelė, sudaryta iš vienodų lygiakraščių trikampių. Alisa ir Bobas, pakaitomis atlikdami ėjimus, žaidžia tokį žaidimą su duotąja figūra. Savo ėjimo metu žaidėjas nuspalvina atkarpą (įskaitant jos galus), laikydamasis šių trijų taisyklių:
i) Atkarpos galai turi sutapti su pavaizduotų lygiakraščių trikampių viršūnėmis.
ii) Atkarpa turi būti sudaryta iš šių trikampių vienos ar kelių kraštinių.
iii) Atkarpa negali turėti nė vieno taško (įskaitant galus), priklausančio anksčiau nuspalvintai atkarpai.
Alisa pradeda, o žaidėjas, kuris nebegali atlikti leistino ėjimo, pralaimi. Kuris žaidėjas gali laimėti, kad ir kaip žaistų jo priešininkas? Aprašykite to žaidėjo strategiją.



Sprendimas. Alisa turi laiminčią strategiją:
Per pirmąjį ėjimą Alisa nuspalvina didžiojo šešiakampio ilgiausią įstrižainę. Tuomet gardelė pasidalija į dvi simetriškas dalis. Po kiekvieno ėjimo nepadengtų atkarpų skaičius mažėja, todėl žaidimas būtinai baigsis. Kai Bobas atlieka ėjimą vienoje dalyje, Alisa atlieka simetrišką ėjimą kitoje dalyje. Taigi Alisa visada gali atlikti ėjimą po Bobo, todėl Bobas tikrai pralaimės, nes žaidimas yra baigtinis, o Alisa visada gali garantuoti ėjimą po jo. □

Uždavinys 2. Tegu $n \geq 3$ yra nelyginis sveikasis skaičius. Varlė šokinėja skaičių tiesėje, pradėdama taške 0, ir atlieka n šuolių: vieną ilgio 1, vieną ilgio 2, …, vieną ilgio n. Šiuos šuolius ji gali atlikti bet kokia tvarka. Jei kuriuo nors momentu varlė yra taške $a \leq 0$, kitas jos šuolis privalo būti į dešinę. Jei kuriuo nors momentu varlė yra taške $a > 0$, kitas jos šuolis privalo būti į kairę. Raskite didžiausią teigiamą sveikąjį skaičių k, kuriam egzistuoja tokia šuolių tvarka, kad varlė nė karto nenusileistų nė viename iš skaičių $1, 2, \dots, k$.

Sprendimas. Tegu n yra nelyginis ir

$$n = 2m + 1.$$

Parodysime, kad didžiausias galimas k yra m.
Konstrukcija.
Parodysime, kad galima atlikti šuolius taip, kad varlė niekada nenusileistų nė viename iš skaičių $1, 2, \dots, m$. Šuolius atliekame tokia tvarka: pirmiausia šuolį ilgio $m + 1$, o po to poromis

$$(m + i + 1,\ i), \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

Kitaip tariant, šuolių tvarka yra

$$m + 1,\ (m + 2, 1),\ (m + 3, 2),\ \dots,\ (2m + 1, m).$$

Pažymėkime varlės padėtį po kiekvieno šuolio tašku a. Po pirmojo šuolio varlė atsiduria taške $a = m + 1$.

Toliau parodysime, kad po kiekvienos poros $(m+i+1, i)$ varlė visada atsiduria arba taške 0, arba taške $m+1$. Iš tiesų, jei prieš tokią porą varlė yra taške 0, tai pirmasis šuolis vyksta į dešinę ir varlė atsiduria taške $m+i+1 > m$. Kadangi šis taškas yra teigiamas, kitas šuolis vyksta į kairę ir varlė atsiduria taške

$$(m+i+1) - i = m+1.$$

Jei prieš šuolių porą varlė yra taške $m+1$, tai pirmasis šuolis vyksta į kairę ir varlė atsiduria taške

$$(m+1) - (m+i+1) = -i \leq 0,$$

o antrasis šuolis vyksta į dešinę ir varlė atsiduria taške 0.
Taigi po kiekvienos šuolių poros varlė yra arba taške 0, arba taške $m+1$, todėl ji niekada nenusileidžia nė viename iš skaičių $1, 2, \ldots, m$.
Maksimalumas.
Tarkime priešingai, kad įmanoma niekada nenusileisti nė viename iš skaičių

$$1, 2, \ldots, m+1.$$

Kadangi varlė negali nusileisti šiame intervale, jei ji yra teigiamoje pusėje, turi galioti $a \geq m+2$. Didžiausias šuolis į kairę yra $2m+1$ ilgio, todėl labiausiai į kairę ji gali atsidurti taške

$$(m+2) - (2m+1) = 1 - m.$$

Taigi kai varlė yra neigiamoje pusėje arba ties nuliu, jos padėtis priklauso intervalui

$$[\,1-m,\, 0\,].$$

Panagrinėkime momentą, kai atliekamas $m+1$ ilgio šuolis. Jei prieš šuolį varlė yra teigiamame taške, tai ji nusileidžia intervale $[1, m]$. Jei prieš šuolį ji yra neigiamame arba nuliniame taške, tai ji nusileidžia intervale $[2, m+1]$. Abiem atvejais gauname prieštarą.
Todėl $k = m+1$ neįmanomas.
Išvada. Didžiausias galimas skaičius yra

$$\boxed{k = m = \frac{n-1}{2}}.$$

□

Uždavinys 3. Tegu $n > 2$ yra duotas sveikasis skaičius. Jungiajame grafe $\mathbb{G}$, turinčiame n viršūnių, dvi skirtingos, nesujungtos briauna viršūnės pažymėtos A ir B. Dramblys ir pelė stovi atitinkamai viršūnėse A ir B. Kiekvieną sekundę pelė pereina į kurią nors gretimą viršūnę, o dramblys arba pereina į kurią nors gretimą viršūnę, arba lieka savo dabartinėje vietoje. Dramblys nemato, kur yra pelė, tačiau jei kada nors atsiduria toje pačioje viršūnėje kaip pelė, jis išsigąsta ir pabėga, palikdamas grafą visiems laikams. Yra žinoma, kad dramblys turi strategiją taip daryti ėjimus, jog garantuotai pasiektų viršūnę B (joje su pele jis taip pat negali susidurti) nepriklausomai nuo to, kaip juda pelė. Koks yra didžiausias briaunų skaičius, kurį gali turėti grafas $\mathbb{G}$?
Pastaba: grafas vadinamas jungiu, jei einant briaunomis, galima iš bet kurios viršūnės pasiekti bet kurią kitą. Briauna gali jungti tik dvi skirtingas grafo viršūnes, ir tada jas vadiname gretimomis.

Sprendimas. Atsakymas yra $\binom{n-1}{2} + 1$.
Konstrukcijai imkime visas $n-1$ viršūnes, išskyrus B, ir sujunkime kiekvieną jų porą briauna, t. y. sudarykime pilną grafą K_{n-1} ant viršūnių aibės $V(\mathbb{G}) \setminus \{B\}$. Tuomet pridėkime vieną briauną iš B į kurią nors viršūnę, skirtingą nuo A; tą viršūnę pažymėkime C. Šio grafo briaunų skaičius lygus $\binom{n-1}{2} + 1$.
Parodysime, kad tokiame grafe dramblys turi strategiją: pirmą sekundę likti viršūnėje A, antrą sekundę pereiti į C, o trečią sekundę pereiti į B. Iš tiesų, kadangi pelė pradeda B, pirmą sekundę ji privalo išeiti iš B, o B turi vienintelę gretimą viršūnę C, todėl pelė pirmą sekundę atsiduria C. Antrą sekundę pelė privalo

išeiti iš C, taigi ji atsiduria kokioje nors viršūnėje, skirtingoje nuo C. Todėl antrą sekundę dramblys gali pereiti į C ir tikrai nesutiks pelės. Trečią sekundę dramblys pereina į B. Pelė tuo metu negali būti B, nes vienintelis kelias į B veda iš C, o antrą sekundę pelė buvo ne C, vadinasi trečią sekundę ji taip pat negali būti B. Taigi dramblys pasiekia B ir niekada nesutinka pelės.

Įrodysime, kad daugiau briaunų būti negali. Pirmiausia įrodome pagrindinį teiginį.

Lemma. *Grafe $\mathbb{G}$ neegzistuoja joks trikampis, turintis viršūnę B.*

Įrodymas. Prieštarai gauti, tarkime, kad egzistuoja trikampis BXY. Kadangi dramblys turi kelią iki B, kuris tinka nepriklausomai nuo pelės judesių, neprarasdami bendrumo galime teigti, jog pelė iš anksto žinojo šį kelią. Tada ji gali pasirinkti judėjimą atitinkamai. Dramblys negali pasiekti B per vieną sekundę, nes A ir B nėra gretimos viršūnės. Jei dramblio pasirinktas kelias iki B užtrunka lyginį sekundžių kiekį, tuomet pelė gali kaitalioti judėjimą tarp B ir vienos gretimos viršūnės, visada sutikdama drambl̨į ir neleisdama jam pasiekti B vienam. Jei kelias trunka nelyginį sekundžių kiekį (t.y. bent 3), pelė gali vieną kartą apeiti trikampį BXY, po 3 ėjimų vėl grįžti į B, o po to vėl kaitalioti judėjimą tarp B ir gretimos viršūnės. Tokiu būdu pelė vėl gali sutrukdyti drambliui garantuotai pasiekti B vienam, nes ji gali užimti B tada, kai dramblys bando į ją ateiti. Visais atvejais gauname, kad dramblys negali turėti garantuotos strategijos, kas prieštarauja sąlygai. Taigi trikampio su viršūne B būti negali. $\square$

Tegu viršūnės B laipsnis yra k, t.y. B yra sujungta briaunomis su tiksliai k kitų viršūnių. Iš teiginio seka, kad nė viena pora iš tų k viršūnių negali būti sujungta briauna, nes priešingu atveju kartu su B sudarytų trikampį.

Todėl briaunų, *nesujungiančių* B, daugiausia gali būti

$$\binom{n-1}{2} - \binom{k}{2},$$

o briaunų, *sujungiančių* B, yra k. Taigi bendras briaunų skaičius tenkina

$$k + \binom{n-1}{2} - \binom{k}{2} = \binom{n-1}{2} - \frac{k^2-3k}{2} \leq \binom{n-1}{2} + 1,$$

nes $\frac{k^2-3k}{2} \geq -1$ visiems sveikiesiems k, o lygybė pasiekiama, pvz., kai $k = 1$.

Vadinasi, maksimalus galimas briaunų skaičius yra $\binom{n-1}{2} + 1$.

$\square$

Laikas: 4 val. 00 min.
Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.
Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.

Geometrijos Olimpiada
2026 m. vasario 21 d.

Uždavinys 1. Apskritimai γ_1 ir γ_2, kurių centrai atitinkamai yra A ir B, kertasi dviejuose taškuose C ir D. Apskritimas, einantis per A, B ir C, taip antrą kartą kerta γ_1 taške $E \neq C$, o γ_2 taške $F \neq C$, kad tas jo lankas EF, kuriame nėra taško C, yra apskritimų γ_1 ir γ_2 išorėje. Įrodykite, kad šį lanką EF tiesė CD dalija pusiau.

Sprendimas. Pastebėkime, kad $\angle CAD = 2\angle CED$. Kadangi $\angle CAB = \angle DAB$, tai $\angle CAB = \angle CED$. Be to, $\angle CAB = \angle CEB$, taigi $\angle CED = \angle CEB$. Iš to išplaukia, kad taškai E, D ir B yra vienoje tiesėje. Kadangi lankai CB ir BF yra lygūs, tai $\angle CEB = \angle BEF$, o D yra $\angle CEF$ pusiaukampinėje. Analogiškai D yra ir $\angle CFE$ pusiaukampinėje. Taigi D yra įbrėžtinio apskritimo centras. Vadinasi, tiesė CD dalija kampą ECF bei lanką EF pusiau.

$\square$

Uždavinys 2. Trikampio ABC kraštinėse BC ir AC atitinkamai pažymėti taškai D ir E. Tiesė w yra lygiagreti su tiese AB ir eina per C. Taškas F ($F \neq C$) yra apie CED apibrėžto apskritimo ir w susikirtimo taškas. Taškas G yra tiesės FD ir kraštinės AB susikirtimo taškas, o H yra toks taškas ant tiesės AB, kad $\angle HDA = \angle GEB$. Be to, žinoma, kad tiesėje AB pažymėtųjų taškų eilės tvarka yra tokia: $H - A - B$. Duota, kad $DG = EH$. Įrodykite, kad AD ir BE susikirtimo taškas yra ant $\angle ACB$ pusiaukampinės.

Sprendimas. Pažymėkime H' - EF ir AB susikirtimo tašką. Įrodysime, kad $H = H'$.
Teiginys 1: $H'EDB$ yra įbrėžtinis.
Įrodymas: $\angle BH'E = \angle AH'E = \angle EFC = \angle EDC$.
Teiginys 2: $AEDG$ yra įbrėžtinis.
Įrodymas: $\angle EDF = 180 - \angle ECF = \angle A = \angle GAE$.
Teiginys 3: $\angle BEG = \angle H'DA$.
Įrodymas: $\angle AEH' = \angle FEC = \angle FDC = \angle GDB$. Tada $\angle BEG = 180 - \angle AEG - \angle AEH' - \angle BED - \angle DEF = 180 - \angle ADG - \angle GDB - \angle BH'D - \angle DBG = 180 - \angle ADG - \angle GDB - \angle H'DC = \angle H'DA$. Taigi teiginys įrodytas ir $H = H'$.
Tegu Q yra AD ir BE susikirtimo taškas. $\triangle AEH \sim \triangle CEF$ ir $\triangle BDG \sim \triangle CDF$, taigi $HE = \frac{AE \cdot EF}{EC}$ ir $DG = \frac{DF \cdot BD}{DC}$. Iš Čevos teoremos, $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{DF}{EF} = \frac{AC}{BC}$, taigi Q yra ant $\angle ACB$ pusiaukampinės. $\square$

Uždavinys 3. Duotas trikampis ABC. Nagrinėkime apskritimą ω, einantį per B ir C bei kertantį kraštines AB ir AC atitinkamai taškuose $E \neq B$ ir $F \neq C$. Tiesės BF ir CE kerta trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą atitinkamai taškuose $B' \neq B$ ir $C' \neq C$, o atkarpoje BC pažymėtas toks taškas A', kad $\angle C'A'B = \angle B'A'C$. Įrodykite, kad visų galimų trikampių $A'B'C'$ apibrėžtiniai apskritimai eina per tą patį tašką, nepriklausantį nuo ω pasirinkimo.

Sprendimas. Tegu O yra trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras, o P yra tiesių AO ir BC sankirta. Įrodysime, kad trikampio $A'B'C'$ apibrėžtinis apskritimas eina per tašką P, nepriklausantį nuo ω pasirinkimo. Kadangi keturkampis $BEFC$ apibrėžtinis, tai $\angle EBF = \angle ECF \implies AB' = AC.'$ Taigi tiesė AO yra atkarpos $B'C'$ vidurio statmuo. Kita vertus, $\angle C'A'B = \angle B'A'C$. Todėl P yra $\angle B'A'C'$ išorinės pusiaukampinės ir atkarpos $B'C'$ vidurio statmens sankirta. Vadinasi, P yra trikampio $A'B'C'$ apibrėžtinio apskritimo lanko $B'A'C'$ vidurio taškas. Tai ir reikėjo įrodyti.

$\square$

Laikas: 4 val. 00 min.
Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.
Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.

Skaičių Teorijos Olimpiada
2026 m. vasario 22 d.

Uždavinys 1. Duoti tokie natūralieji m, a, b, kad $m^2 < a < b < m^2 + m$. Raskite visus tokius sveikuosius skaičius d, kad $m^2 < d < m^2 + m$ ir skaičius d dalo skaičių ab.

Sprendimas. Tarkime, $m^2 < d < m^2 + m$ ir $d \neq a, b$. Tada $\text{dbd}(a, d) = \text{dbd}(a, d - a) \leq |d - a| < m$. Analogiškai $\text{dbd}(b, d) < m$. Jeigu $d|ab$, tai $\text{dbd}(a, d) \geq \sqrt{d} > m$ arba $\text{dbd}(b, d) \geq \sqrt{d} > m$. Prieštara. Taigi $d = a$ ir $d = b$ yra vieninteliai sprendiniai. □

Uždavinys 2. Natūralusis skaičius vadinamas *legendiniu*, jei su kokiu nors natūraliuoju n jis yra lygus natūraliųjų skaičių, kurie yra tarpusavyje pirminiai su n^2 ir neviršija n^2, skaičiui. Įrodykite, kad kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius gali būti užrašytas kaip dviejų legendinių skaičių santykis.

Sprendimas. Teigiamų sveikųjų skaičių, kurie yra tarpusavyje pirminiai su m ir neviršija m, skaičius yra Eulerio funkcija $\varphi(m)$. Taigi skaičius yra legendinis tada ir tik tada, kai jis lygus $\varphi(n^2)$ su kokiu nors teigiamu sveikuoju n.
Žinoma, kad jei

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

kur p_i yra skirtingi pirminiai skaičiai, o α_i yra teigiami sveikieji skaičiai, tai

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)\, p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1).$$

Kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius a gali būti užrašytas pavidalu

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n},$$

kur $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ yra pirminiai skaičiai, o α_i yra sveikieji skaičiai, nelygūs nuliui.
Naudosime sustiprintą indukciją pagal didžiausią pirminį skaičių p_n šioje išraiškoje: skaičių a galima užrašyti kaip $\varphi(k^2)/\varphi(l^2)$ su tokiais teigiamais sveikaisiais k, l, kurių visi pirminiai dalikliai yra ne didesni už p_n.
Bazinis atvejis. Jei išskaidoje nėra nė vieno pirminio (t. y. $a = 1$), teiginys akivaizdus:

$$1 = \frac{\varphi(1^2)}{\varphi(1^2)}.$$

Indukcinis žingsnis. Tarkime, kad teiginys galioja visiems teigiamiems racionaliesiems skaičiams, kurių pirminiai dalikliai yra mažesni už p_n. Tegu $p = p_n$ ir $\alpha = \alpha_n$. Žinome, kad $\varphi(p^\beta) = p^{\beta-1}(p-1)$, kai $\beta \geq 1$.
Išreikšime p^α kaip Eulerio funkcijų reikšmių santykį, kai argumentai yra sveikų skaičių kvadratai:

- Jei α nelyginis ir teigiamas:

$$\frac{\varphi(p^{\alpha+1})}{\varphi(1)} = p^\alpha(p-1), \quad \text{kur } p^{\alpha+1} = (p^{(\alpha+1)/2})^2;$$

- Jei α nelyginis ir neigiamas:

$$\frac{\varphi(1)}{\varphi(p^{-\alpha+1})} = \frac{p^\alpha}{p-1}, \quad \text{kur } p^{-\alpha+1} = (p^{(-\alpha+1)/2})^2;$$

- Jei α lyginis ir teigiamas:
$$\frac{\varphi(p^{\alpha+2})}{\varphi(p^2)} = p^\alpha, \quad \text{kur } p^{\alpha+2} = (p^{(\alpha+2)/2})^2;$$
- Jei α lyginis ir neigiamas:
$$\frac{\varphi(p^2)}{\varphi(p^{-\alpha+2})} = p^\alpha, \quad \text{kur } p^{-\alpha+2} = (p^{(-\alpha+2)/2})^2.$$

Kiekvienu atveju gauname
$$\frac{\varphi(s^2)}{\varphi(t^2)} = b \cdot p^\alpha,$$
kur s ir t yra p_n laipsniai (galbūt lygūs 1), o b yra racionalusis skaičius, kurio visi pirminiai dalikliai yra dalikliai skaičiaus $p_n - 1$, taigi mažesni už p_n.
Apsvarstykime skaičių
$$c = \frac{a}{b \cdot p^\alpha}.$$
Visi pirminiai dalikliai c išskaidoje yra mažesni už p_n, todėl pagal indukcinę prielaidą
$$c = \frac{\varphi(k^2)}{\varphi(l^2)}$$
su tokiais k, l, kurių visi pirminiai dalikliai yra mažesni už p_n. Tada k yra tarpusavyje pirminis su s, o l – su t.
Kadangi Eulerio funkcija yra dauginamoji, t. y. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, kai $\gcd(x, y) = 1$, gauname
$$\frac{\varphi((ks)^2)}{\varphi((lt)^2)} = \frac{\varphi(k^2)\varphi(s^2)}{\varphi(l^2)\varphi(t^2)} = c \cdot b \cdot p^\alpha = a.$$

Taigi indukcinis žingsnis baigtas.
Pagal indukciją kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius gali būti užrašytas kaip dviejų legendinių skaičių santykis.

$\square$

Uždavinys 3. Duotas $p > 10^9$ - toks pirminis skaičius, kad $4p + 1$ irgi pirminis. Įrodykite, kad trupmenos $\frac{1}{4p+1}$ dešimtainėje išraiškoje yra kiekvienas iš skaitmenų $0, 1, ..., 9$.

Sprendimas. Tegu $q = 4p + 1$. Pagal mažąją Ferma teoremą $10^{4p} \equiv 1 \pmod q$, todėl liekanos 10 eilė mod q yra p, $2p$, arba $4p$. Taigi, $10 \equiv g^4, g^2$ arba $g \pmod q$ kažkokiam generatoriui g mod q. Bet kuriuo atveju 10^k, $k \in \mathbb{N}$, įgys visas liekanas g^{4n} mod q. Taigi, visiems $m \in \mathbb{Z}$, tenkinantiems $q \nmid m$, egzistuoja $k \in \mathbb{N}$ toks, kad $m^4 \equiv 10^k \pmod q$. Jeigu $10^k \equiv c \pmod q$, tai $c = 10^k + aq$ kažkokiam $a \in \mathbb{Z}$, todėl $\frac{c}{q} = a + \frac{10^k}{q}$, taigi trupmeninė skaičiaus $\frac{c}{q}$ dalis yra trupmeninė skaičiaus $\frac{1}{q}$ dalis paslinkus kablelį per k skaitmenų į dešinę. Teigiame, kad visiems $d \in \{0, 1, ..., 9\}$ egzistuoja $m \in \mathbb{N}$ toks, kad $\frac{d}{10} \leq \frac{m^4}{q} < \frac{d+1}{10}$. Iš to seka, kad pirmas skaičiaus $\frac{m^4}{q}$ skaitmuo po kablelio yra d, taigi skaičiaus $\frac{1}{q}$ dešimtainėje išraiškoje yra skaitmuo d. Tam, kad įrodytume teiginį, užtenka įrodyti, kad $\frac{(m+1)^4}{q} - \frac{m^4}{q} < \frac{1}{10}$, kai $m^4 < q$. Bet jeigu $m^4 < q$, tai $(m + 1)^4 - m^4 = 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 \leq 15m^3 < 15q^{\frac{3}{4}} < \frac{q}{10}$, nes $q > 10^9$. $\square$

Laikas: 4 val. 00 min.
Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.
Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.
Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.