

## Atranka į Baltijos kelio konkursą

2025-09-28

1. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams  $a_0, a_1, \dots, a_n, k$ , kur  $n > 1$  ir  $a_1 = a_{n-1} = 0$ , galioja nelygybė:

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|.$$

2. Tegul  $O$  ir  $H$  yra atitinkamai trikampio  $ABC$  apibrėžtinio apskritimo centras ir aukštinių susikirtimo taškas. Taškas  $P$  yra taško  $A$  atspindys tiesės  $OH$  atžvilgiu. Tarkime, kad  $P$  nėra toje pačioje tiesės  $BC$  pusėje kaip  $A$ . Taškai  $E$  ir  $F$  yra atitinkamai ant  $AB$  ir  $AC$ , kad  $BE = PC$  ir  $CF = PB$ . Tegul  $K$  yra tiesių  $AP$  ir  $OH$  susikirtimo taškas. Įrodykite, kad  $\angle EKF = 90^\circ$ .
3. Ant lentos kažkokia tvarka surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2025 (kiekvienas skaičius parašytas po lygiai vieną kartą). Barbora daro tokius veiksmus: jei pirmasis ant lentos parašytas skaičius yra  $k$ , ji nutrina pirmuosius  $k$  skaičių, tada tuos pačius skaičius atvirkščia tvarka parašo lentos pradžioje, o likusių narių eilės tvarkos nekeičia. (Pavyzdžiui, seka  $\{3, 5, 10, 4, \dots\}$  tampa  $\{10, 5, 3, 4, \dots\}$ ). Įrodykite, kad po baigtinio ėjimų skaičiaus pirmasis ant lentos parašytas skaičius bus 1.
4. Raskite visus teigiamus racionaliuosius  $(x, y)$ , tenkinančius lygtį:

$$yx^y = y + 1.$$

## Atranka į Baltijos kelio konkursą

2025-09-28

1. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams  $a_0, a_1, \dots, a_n, k$ , kur  $n > 1$  ir  $a_1 = a_{n-1} = 0$ , galioja nelygybė:

$$|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|.$$

Sprendimas: Tegul  $t$  yra lygties  $x^2 - kx - 1 = 0$  šaknis,  $|t| \geq 1$  (tokia šaknis tikrai egzistuoja, nes šaknų sandauga  $-1$ , o šaknys realios. Tada kiekvienam  $i = 0, 1, \dots, n-2$ ,

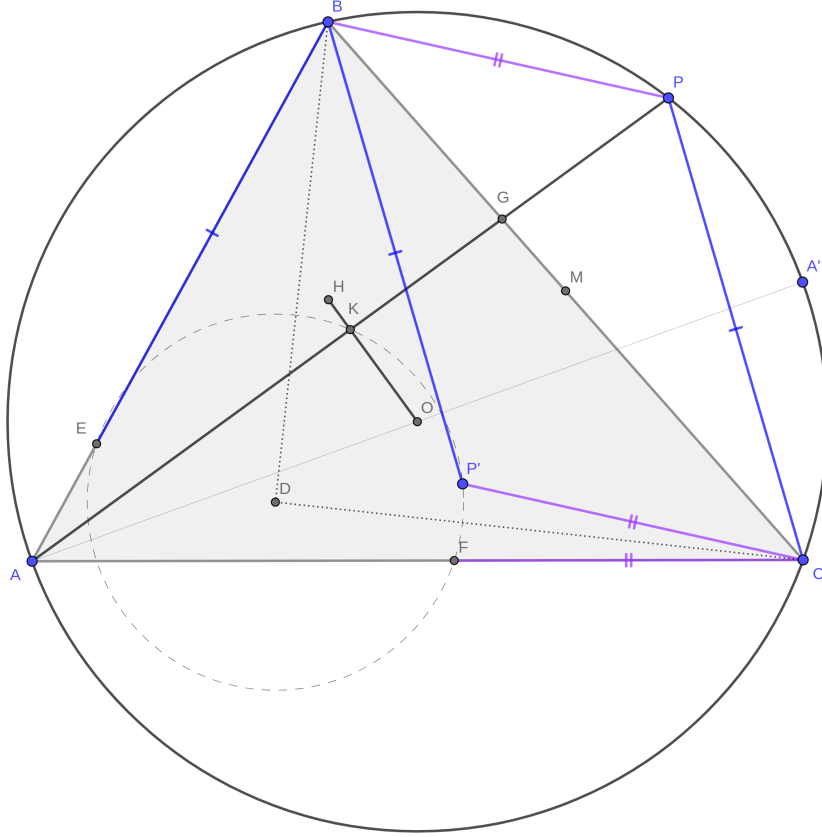
$|a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}| = |(a_i - ta_{i+1}) + \frac{1}{t}(a_{i+1} - ta_{i+2})| \geq |a_i - ta_{i+1}| - \frac{1}{|t|}|a_{i+1} - ta_{i+2}| \geq |a_i - ta_{i+1}| - |a_{i+1} - ta_{i+2}|$  (kadangi  $\frac{1}{|t|} \leq 1$ ). Sudėję šias nelygybes nuo  $i = 0$  iki  $n-2$  (išsaugant  $\frac{1}{|t|}$ , kai  $i = n-2$ ),

$$\sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}| \geq |a_0 - ta_1| - \frac{1}{|t|}|a_{n-1} - ta_n| = |a_0| - |a_n|.$$

2. Tegul  $O$  ir  $H$  yra atitinkamai trikampio  $ABC$  apibrėžtinio apskritimo centras ir aukštinių susikirtimo taškas. Taškas  $P$  yra taško  $A$  atspindys tiesės  $OH$  atžvilgiu. Tarkime, kad  $P$  nėra toje pačioje tiesės  $BC$  pusėje kaip  $A$ . Taškai  $E$  ir  $F$  yra atitinkamai ant  $AB$  ir  $AC$ , kad  $BE = PC$  ir  $CF = PB$ . Tegul  $K$  yra tiesių  $AP$  ir  $OH$  susikirtimo taškas. Įrodykite, kad  $\angle EKF = 90^\circ$ .

Sprendimas:

- (a) Pažymėkime taip  $P'$ , kad  $BPCP'$  yra lygiagretainis. Tegul taškas  $D$  yra  $EBP'$  ir  $P'CF$  pusiaukampinių susikirtimo taškas. Pažymėkime taip  $A'$ , kad  $AA'$  yra skersmuo.  $M$  yra  $BC$  vidurio taškas.
- (b) Įrodysime, kad  $P'$  priklauso tiesei  $HO$ . Žinome, kad  $PM = MP'$  ir  $HM = MA'$  (antra lygybė yra gerai žinomas faktas). Tada  $HPA'P'$  yra lygiagretainis. Tada  $HO \parallel PA'$  ir  $HP' \parallel PA' \implies P'$  priklauso tiesei  $HO$ .
- (c) Įrodysime, kad  $\angle BDC = 90^\circ$ : Pastebėkime, kad  $\angle DBC + \angle DCB = \frac{\angle B + \angle P'BC}{2} + \frac{\angle C + \angle P'CB}{2} = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 90^\circ \implies \angle BDC = 90^\circ$



- (d) Įrodysime, kad  $\angle EP'F = 90^\circ$  ir  $D$  yra  $EF$  vidurio taškas.  $EP' \perp BD$  ir  $CD \perp P'F$  ir  $\angle BDC = 90^\circ \implies \angle EP'F = 90^\circ$ . Kadangi  $DE = DP'$  ir  $DP' = DF \implies D$  yra apie  $EP'F$  apibrėžto apskritimo centras ir  $D$  yra  $EF$  vidurio taškas.
- (e) Įrodysime, kad  $DM \parallel AG$ . Pastebėkime, kad  $\angle DMB = 2\angle DCB = 2(\angle P'CB + \angle DCF) = 2\left(\alpha + \frac{\angle C - \alpha}{2}\right) = \alpha + \angle C = \alpha + \angle APB = \angle AGB$ , kur  $\angle PBC = \alpha \implies DM \parallel AG$ .
- (f) Įrodysime, kad  $\angle EP'F = 90^\circ$ . Kadangi  $PM = MP'$  ir  $DM \parallel AG \implies K$  yra  $P'$  atspindys  $DM$  atžvilgiu  $\implies DK = DP' \implies K$  priklauso apie  $EP'F$  apibrėžtam apskritimui ir  $\angle EKF = \angle EP'F = 90^\circ$ .

3. Ant lentos kažkokia tvarka surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2025 (kiekvienas skaičius parašytas po lygiai vieną kartą). Barbora daro tokius veiksmus: jei pirmasis ant lentos parašytas skaičius yra  $k$ , ji nutrina

pirmuosius  $k$  skaičių, tada tuos pačius skaičius atvirkščia tvarka parašo lentos pradžioje, o likusių narių eilės tvarkos nekeičia. (Pavyzdžiui, seka  $\{3, 5, 10, 4, \dots\}$  tampa  $\{10, 5, 3, 4, \dots\}$ ). Įrodykite, kad po baigtinio ėjimų skaičiaus pirmasis ant lentos parašytas skaičius bus 1.

Sprendimas: Pakeiskime 2025 į  $n$  ir įrodysime indukcijos būdu. Kai  $n = 1$ , sąlyga akivaizdi. Dabar tarkime, kad sąlyga teisinga su  $n$  ir turime ant lentos parašytus  $n + 1$  skaičius.

Jei  $n + 1$  parašytas pačiame gale, tai su juo niekada nebus atliekama jokių veiksmų, tad veiksmai bus identiški, tarsi turėtume tik  $n$  skaičių, taigi, iš indukcijos žingsnio, kažkada priekyje atsiras 1.

Jei  $n + 1$  parašytas ne pačiame gale, tai jei jis kažkada atsidurtų pačiame priekyje, kitu ėjimu nueitų į patį galą ir vėl turėtume prieš tai buvusią situaciją. Vadinasi,  $n + 1$  niekada nebus priekyje. Tarkime, pačiame gale yra skaičius  $x$ . Bet tada, kada  $n + 1$  niekada nebus priekyje, tai  $x$  niekada nebus liečiamas. Taigi veiksmai bus identiški tiems, tarsi  $x$  ir  $n + 1$  būtų sukeisti vietomis, o tai jau analogiškai situacijai, kai turime  $n$  skaičių.

Atskirai reikia panagrinėti atvejį, kai  $x = 1$ . Bet tokiu atveju galime įsivaizduoti, kad vietoje  $n + 1$  turime 1 ir ėjimų tai visiškai nekeičia, nes jau teigėme, kad  $n + 1$  niekada nebus priekyje. Tokiu atveju pagal indukcijos žingsnį 1 (o iš tiesų  $n + 1$ ) pateks į pirmą vietą ir kitu ėjimu vienetą atsiras priekyje.

Taigi bet kurioje situacijoje po baigtinių ėjimų skaičiaus priekyje atsiras 1.

4. Raskite visus teigiamus racionaliuosius  $(x, y)$ , tenkinančius lygtį:

$$yx^y = y + 1.$$

Sprendimas:

Tegu  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$ , kur šios trupmenos nesuprastinamos. Lygtį galime pertvarkyti taip:  $c^d a^c = b^c (c + d)^d$ . Kadangi  $dbd(c, c + d) = 1, dbd(a, b) = 1$ , gauname, kad  $a^c = (c + d)^d, c^d = b^c$ . Iš antrosios lygties gauname, kad egzistuoja toks  $m \in \mathbb{N}$ , kad  $c = m^c, b = m^d$ .

Jei  $c = m^c$ , tai jei  $c > 1$ , tada  $c = m^c = m^{m^c} = \dots$  būtų neaprežtas, taigi belieka atvejis  $m = c = 1$ .

Jei  $m = c = 1, b = 1, a = (d + 1)^d$ . Nesunku patikrinti, kad  $x = (d + 1)^d, y = \frac{1}{d}$  yra sprendinys.