

# Atranka į MEMO 2026

1 Diena

2026 06 20

**Uždavinys 1.** Teigiami realieji skaičiai  $a, b, c$  tenkina  $a + b + c = 1$ . Įrodykite, kad

$$\frac{1+ab}{a+b} + \frac{1+bc}{b+c} + \frac{1+ca}{c+a} \geq 5.$$

*Sprendimas.*

$$\frac{1+ab}{a+b} = \frac{a+b+c+ab}{a+b} = 1 + \frac{c+ab}{a+b} = 1 + \frac{c(a+b+c)+ab}{a+b} = 1 + \frac{(b+c)(c+a)}{a+b}$$

Pagal aritmetinę geometrinę vidurkių nelygybę turime, kad  $\frac{1}{2} \left( \frac{(b+c)(c+a)}{a+b} + \frac{(a+b)(c+a)}{b+c} \right) \geq \sqrt{(c+a)^2} = c+a$  (atitinkamai tas pats su kitomis poromis).

Tada

$$\frac{1+ab}{a+b} + \frac{1+bc}{b+c} + \frac{1+ca}{c+a} = 3 + \frac{(b+c)(c+a)}{a+b} + \frac{(a+b)(c+a)}{b+c} + \frac{(b+c)(a+b)}{c+a} \geq 3 + (c+a) + (a+b) + (b+c) = 5.$$

Lygybė galios, kai  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

□

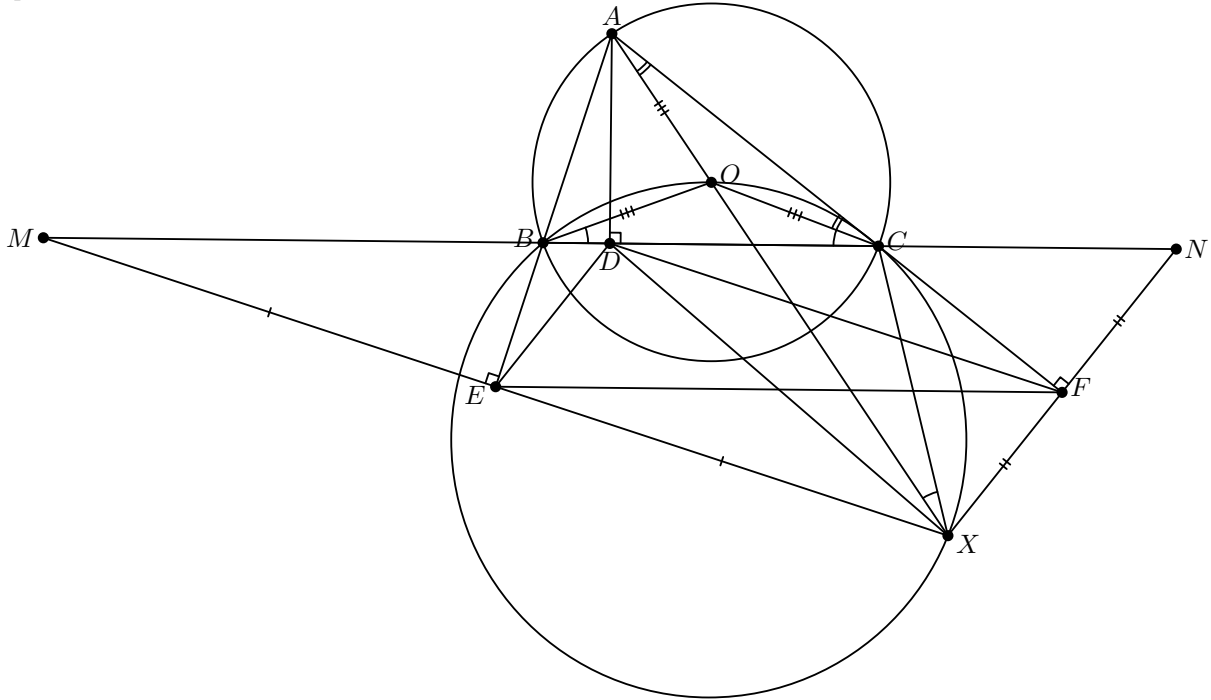
**Uždavinys 2.** Alisa ir Bobas rado 100 vienodo dydžio plytų: 50 baltų ir 50 juodų. Jie žaidžia žaidimą. Bokštu vadinsime vieną ar kelias plytas, sudėtas viena ant kitos. Žaidimo pradžioje visos plytos stovi atskirai, taigi yra 100 bokštų. Vieno ėjimo metu žaidėjas turi taip uždėti vieną iš bokštų ant kito bokšto viršaus (bokštų apverstai negalima), kad gautame bokšte nebūtų dviejų tos pačios spalvos plytų greta. Žaidėjai ėjimus atlieka paeiliui, Alisa pradeda. Tas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi žaidimą. Kas gali garantuoti pergalę nepriklausomai nuo priešininko strategijos?

*Sprendimas.* Laimi Bobas. Bokštą vadinkime baltu/juodu, jei jo viršutinė ir apatinė plytos abi yra atitinkamai baltos/juodos. Pirmiausia pastebėkime, kad Bobas laimi, kai yra 2 balti ir 2 juodi bokštai. Iš tikrųjų, Alisa turi sujungti juodą ir baltą bokštus tam tikra tvarka. Neprarasdami bendrumo tarkime, kad ji padėjo baltą bokštą ant juodo. Tuomet Bobas gali sudėti du likusius bokštus atvirkštine tvarka, t.y. juodą ant balto. Tada Alisa negali sujungti dviejų gautų bokštų pagal taisykles. Dabar indukcija parodysime, kad Bobas visada laimi iš padėties, kurioje yra  $n$  baltų ir  $n$  juodų bokštų, kai  $n \geq 2$ . Alisa turi sujungti du skirtingų spalvų bokštus, tarkime, ji uždeda baltą ant juodo, Bobas gali uždėti dar vieną juodą ant to pačio bokšto. Gautas bokštas yra baltas, todėl lieka  $n-1$  baltų ir  $n-1$  juodų bokštų, o iš šitos padėties Bobas laimi pagal indukcijos prielaidą. Atvejis, kai Alisa uždėjo juodą bokštą ant viršaus, yra simetriškas. □

**Uždavinys 3.** Trikampio  $ABC$  apibrėžtinio apskritimo centras yra  $O$ , o atkarpa  $AD$  yra aukštinė (čia  $D$  priklauso  $BC$ ). Tegul  $AO$  dar kartą kerta trikampio  $BOC$  apibrėžtinį apskritimą taške  $X \neq O$ . Tiesėse  $AB$  ir  $AC$  atitinkamai pažymėti tokie taškai  $E$  ir  $F$ , kad  $\angle XEA = \angle XFA = 90^\circ$ . Įrodykite, kad tiesė  $DX$  dalija atkarpą  $EF$  pusiau.

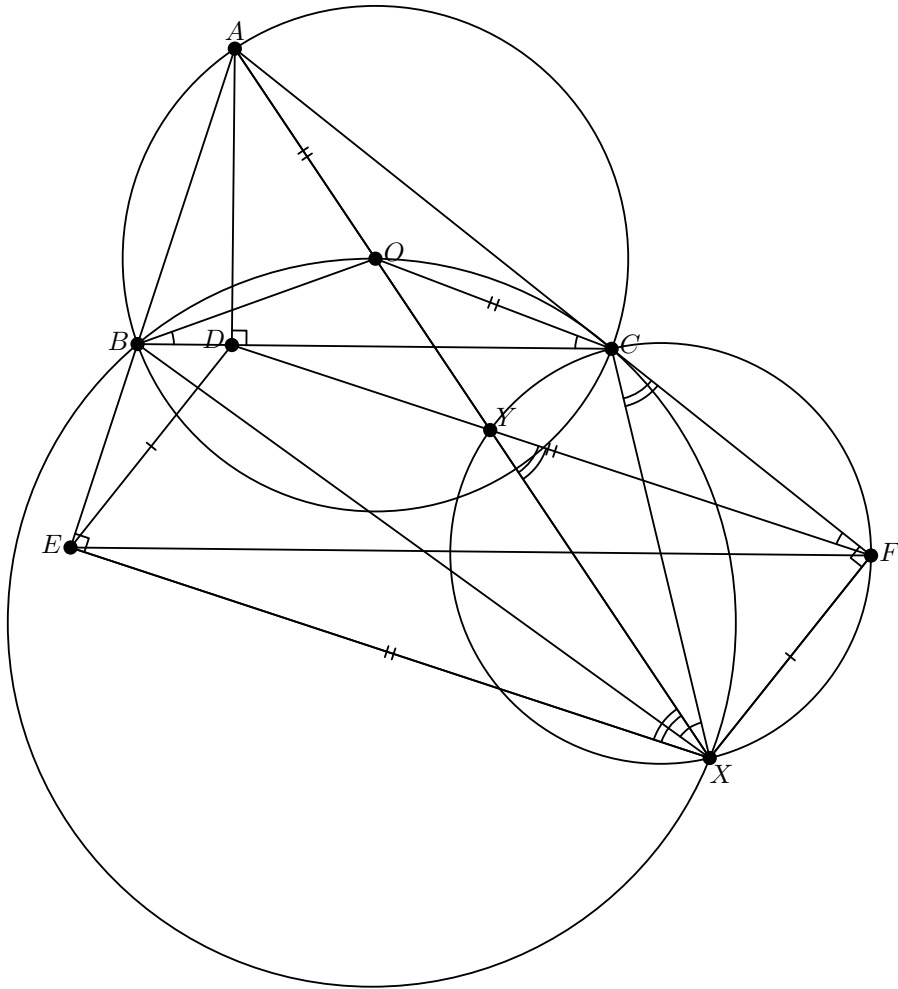
*Sprendimas.* Pasižiūrėjus į brėžinį, galime pastebėti, jog atkarpos  $EF$  ir  $DX$  dalija vienos kitą pusiau, vadinasi galime spėti, jog  $DEXF$  lygiagretainis. Tą ir bandysime įrodyti. Tegul  $M$  yra tiesių  $XE$  ir  $BC$

susikirtimo taškas, o  $N$  yra  $XF$  ir  $BC$  susikirtimo taškas. Pasižiūrėjus į brėžinį matome, kad galime bandyti įrodinėti, jog  $F$  yra  $XN$  vidurio taškas. Turime, kad  $\angle XCF = \angle OAC + \angle OXC = \angle OAC + \angle OBC = \angle OCA + \angle OCB = \angle BCA = \angle FCN \implies FX = FN$ , čia naudojames įbrėžtiniu  $BOCX$  ir tuo, kad trikampiai  $AOC$  ir  $BOC$  lygiašoniai. Analogiškai  $E$  yra  $MX$  vidurio taškas. Gauname, jog taškas  $A$  yra atkarpų  $MX$  ir  $NX$  vidurio statmenų susikirtimo taškas, kas reiškia, jog  $A$  yra trikampio  $MXN$  apibrėžtinio apskritimo centras, vadinasi  $D$  yra  $MN$  vidurio taškas, nes  $AD \perp MN$ . Kadangi  $DF$  yra trikampio  $MXN$  vidurio linija, tai  $DF \parallel EX$  ir  $DF = \frac{1}{2}MX = EX$ , vadinasi gauname, kad  $DEXF$  lygiagretainis ir  $DX$  dalija  $EF$  pusiau.



□

*Sprendimas.* Naudojant centrinio-įbrėžtinio kampų savybę, turime kad  $\angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAD$ . Taip pat  $\angle ADB = \angle AFX = 90^\circ$ , todėl trikampiai  $ADB$  ir  $AFX$  yra panašūs. Vadinasi, egzistuoja spiralinė homotetija  $BD \rightarrow XF$ , kurios centras  $A$ . Todėl pagal spiralinės homotetijos dualumą, taip pat egzistuoja spiralinė homotetija  $BX \rightarrow DF$  kurios centras  $A$ , todėl trikampiai  $ABX$  ir  $ADF$  panašūs. Taigi  $\angle BXA = \angle DFA$ . Tegu tiesės  $AX$  ir  $FD$  kertasi taške  $Y$ . Tada naudojant įbrėžtinių kampų savybes  $\angle CFY = \angle BXO = \angle BCO = \angle CBO = \angle CXO = \angle CXY$ , todėl keturkampis  $CFXY$  – įbrėžtinis. Pastebėkime, jog analogiškai trikampių  $ADB$  ir  $AFX$  panašumui, taip pat panašūs trikampiai  $ADC$  ir  $AEX$ . Vadinasi,  $\angle ACD = \angle AXE$ . Taigi turime  $\angle YXE = \angle ACD = \angle ACO + \angle OCB = \angle CAO + \angle CXO = \angle XCF = \angle XYF$ , vadinasi tiesės  $DF$  ir  $XE$  lygiagrečios pagal lygus priešinius kampus. Analogiškai gauname ir tiesių  $DE$  ir  $XF$  lygiagretumą, taigi  $DEXF$  lygiagretainis, o jo įstrižainės kerta vieną kitą pusiau.



□

**Uždavinys 4.** Tarkime  $a_1, a_2$  ir  $a_3$  yra tokie skirtingi teigiami sveikieji skaičiai, kad:

- (i)  $a_1$  dalo  $a_2 + a_3 + a_2a_3$ ;
- (ii)  $a_2$  dalo  $a_3 + a_1 + a_3a_1$ ;
- (iii)  $a_3$  dalo  $a_1 + a_2 + a_1a_2$ .

Įrodykite, kad negali būti taip, kad visi skaičiai  $a_1, a_2$  ir  $a_3$  yra pirminiai.

*Sprendimas.* Įrodysime prieštaros metodu. Tarkime, kad egzistuoja tokie skirtingi pirminiai skaičiai  $a_1, a_2, a_3$ , kurie tenkina uždavinio sąlygas. Nemažindami bendrumo, laikykime, kad  $a_1 < a_2 < a_3$ .

Iš (i) turime:

$$a_1 \mid a_2 + a_3 + a_2a_3 \implies a_1 \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

Analogiškai iš (ii) ir (iii) seka, kad  $a_2$  ir  $a_3$  taip pat dalija šią sumą. Kadangi skaičiai  $a_i$  yra poromis pirminiai:

$$a_1a_2a_3 \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1,$$

iš to seka nelygybė  $a_1a_2a_3 \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ . Ją pertvarkius gaunama:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1) \leq 2(a_1 + a_2 + a_3) - 1.$$

Išnagrinėkime du atvejus pagal mažiausio pirminio skaičiaus  $a_1$  reikšmę:

- Atvejis  $a_1 = 2$ : Iš (i) gauname  $2 \mid a_2 + a_3 + a_2a_3$ . Kadangi  $a_2, a_3 > 2$  yra pirminiai nelyginiai skaičiai, reiškinys  $a_2 + a_3 + a_2a_3$  yra nelyginis - prieštara.
- Atvejis  $a_1 > 2$ : Kadangi  $a_1 \geq 3$  ir  $a_2 \geq 5$ , kairiąją nelygybės pusę galime sumažinti:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1) \geq 2 \cdot 4 \cdot (a_3 - 1) = 8a_3 - 8.$$

Iš sąlygos  $a_1 < a_2 < a_3$  seka, kad  $a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3$ , todėl dešiniąją pusę galime padidinti:

$$2(a_1 + a_2 + a_3) - 1 < 6a_3 - 1.$$

Tai turi galioti  $8a_3 - 8 < 6a_3 - 1 \implies 2a_3 < 7$ . Bet mes žinome, kad  $a_3 \geq 7$ , gauname prieštarą.

Abiem atvejais gavome prieštarą, todėl skaičiai  $a_1, a_2, a_3$  negali visi būti pirminiai. □

*Laikas: 4 val. 30 min.  
Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.  
Kiekvienas uždavinys vertas 8 tašky.  
Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.*

# Atranka į MEMO 2026

2 Diena

2026 06 21

**Uždavinys 1.** Ar egzistuoja tokie 8 paporiui skirtingi sveikieji skaičiai  $a, b, c, d, e, f, g, h$ , kad lygčių  $x^2 + ax + b = 0, x^2 + cx + d = 0, x^2 + ex + f = 0$  ir  $x^2 + gx + h = 0$  sprendiniai yra (kažkokia tvarka)  $a, b, c, d, e, f, g, h$ ?

*Sprendimas.* Ne, neegzistuoja.

Tarkime, kad egzistuoja. Tarkime, pirmos lygties sprendiniai yra  $x_1, x_2$ , antros -  $x_3, x_4$ , trečios -  $x_5, x_6$ , o ketvirtos -  $x_7, x_8$  ir skaičiai  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$  yra kažkokia tvarka parašyti  $a, b, c, d, e, f, g, h$ . Tada iš Vieto teoremos gauname, kad  $b = x_1x_2, d = x_3x_4, f = x_5x_6, h = x_7x_8$ , sudauginus visas šias lygtis gauname, kad  $bdfh = abcdefgh$ . Jei nėra vienas iš skaičių  $b, d, f, h$  nėra 0, tai suprastinę abi lygties puses gautume, kad  $aceg = 1$ , kas neįmanoma, nes  $a, c, e, g$  yra keturi skirtingi sveikieji skaičiai. Vadinasi, vienas iš skaičių  $b, d, f, h$  yra 0, neprarasdami bendrumo tarkime, kad  $b = 0$ .

Nagrinėkime daugianarį  $(x^2 + ax)(x^2 + cx + d)(x^2 + ex + f)(x^2 + gx + h)$ . Mes tiksliai žinome jo šaknis, taigi žinome, kad su bet koku  $x$  teisinga lygtis  $(x^2 + ax)(x^2 + cx + d)(x^2 + ex + f)(x^2 + gx + h) = x(x - a)(x - c)(x - d)(x - e)(x - f)(x - g)(x - h)$ . Padalinę iš  $x$  ir nagrinėdami konstantinį narį gauname, kad  $adf h = -acdefgh$ . Nė vienas iš šių skaičių nėra 0 (nes  $b = 0$  ir jie visi skirtingi), taigi  $ceg = -1$ , kas akivaizdžiai neįmanoma, taigi prieštara.

Pastaba: Įrodyti, kad  $b = 0$  galima nagrinėjant analogišką daugianarių lygtį kaip antroje sprendimo pusėje, čia pateikiamas būdas padaryti tai nenaudojant daugianario sąvokos. □

**Uždavinys 2.** Tegu  $M$  yra aibė, sudaryta iš šešių skirtingų teigiamų sveikųjų skaičių, kurių suma lygi 60. Visi 6 aibės skaičiai yra užrašyti ant kubo sienų – po vieną skaičių ant kiekvienos sienos. Vienu ėjimu pasirenkamos trys kubo sienos, turinčios bendrą viršūnę, ir prie šių sienų skaičių pridedama po 1. Nustatykite kiek yra tokių aibių  $M$ , kurioms po baigtinio ėjimų skaičiaus įmanoma gauti kubą, kuriame visose sienose užrašyti skaičiai yra vienodi.

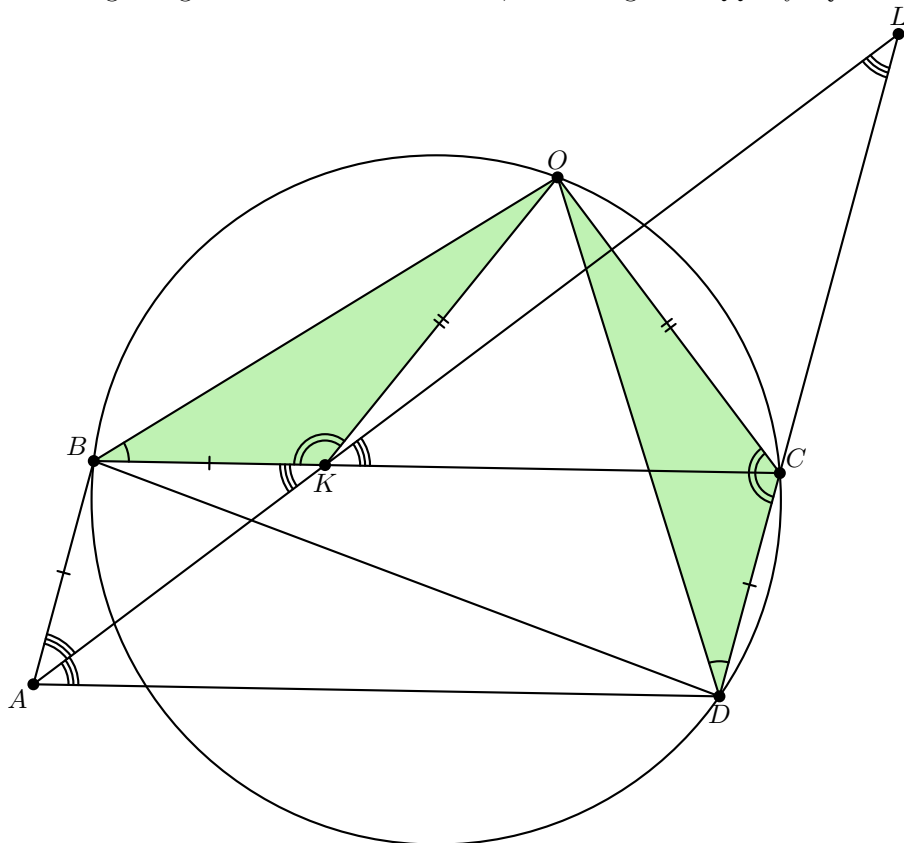
*Sprendimas.* Nagrinėkime priešingų kubo sienų poras. Pastebėkime, kad kiekvienas ėjimas kiekvienos poros sumą padidina 1. Todėl, jei galiausiai visose kubo sienose skaičiai tampa vienodi, kiekvienos poros suma pradžioje turėjo būti tokia pati. Visų sienų skaičių suma yra 60, vadinasi, kiekvienos poros suma turi būti 20.

Įrodysime, kad jei kiekvienos sienų poros suma yra 20, tuomet skaičius ant kubo sienų tikrai galima padaryti vienodus. Pastebėkite, kad jei iš kiekvienos poros pasirinksite po vieną sieną, gautos trys sienos visada turės bendrą viršūnę. Tegu  $x$  būna didžiausias sveikasis skaičius ant kubo. Tegul  $y$  yra antras didžiausias sveikasis skaičius ant kubo. Pasirinkite viršūnę kuri turi  $y$ , ir mažesnius skaičius iš likusių dviejų porų sienų. Tada jas visas galime padidinti per  $x - y$  ir turėsime dvi sienas su skaičium  $x$ . Kartokime tą pačią strategiją su 3 didžiausiu skaičium. Ir kadangi visų skaičių poros yra lygios, mes gausime tris sienas su  $x$  ir tris su  $20 - x$ . Ir paskutiniaisiais ėjimais pereisime iš  $20 - x$  į  $x$ .

Belieka suskaičiuoti kiek yra tokių aibių  $M$ , kurios narius galima padalyti į tris poras, kurių kiekvienos suma yra 20. Yra 9 teigiamų sveikųjų skaičių poros, kurių suma lygi 20:  $\{x, 20 - x\}$ , kai  $1 \leq x \leq 9$ . Mes galime pasirinkti bet kurias 3 iš jų, kad sudarytume aibę  $M$ , todėl atsakymas yra  $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ . □

**Uždavinys 3.** Lygiagretainio  $ABCD$  kampo  $\angle BAD$  pusiaukampinė kerta tieses  $BC$  ir  $CD$  atitinkamai taškuose  $K$  ir  $L$ . Trikampio  $CKL$  apibrėžtinio apskritimo centras yra  $O$ . Įrodykite, kad taškai  $B, C, D$  ir  $O$  priklauso vienam apskritimui.

*Sprendimas.* Tegul  $\angle BAD = 2\alpha$ , tada  $\angle BAK = \angle LAC = \alpha$ . Kadangi  $BC \parallel AD$ , tai  $\angle BKA = \angle KAD = \alpha = \angle BAK$ , vadinasi  $\triangle BAK$  lygiašonis ir  $CD = BA = BK$ . Kadangi  $O$  yra  $LKC$  apibrėžtinio apskritimo centras, tai turime, jog  $OK = OC$ . Matome, jog įrodžius, kad  $\triangle OKB = \triangle OCD$ , seks, kad  $\angle OBK = \angle OBC = \angle ODC \implies OCDB$  įbrėžtinis. Turime dvi reikiamas kraštines, vadinasi mums užtenka parodyti, jog  $\angle BKO = \angle OCD$ . Turime, kad  $\angle LKC = \angle BKA = \alpha$ . Tada  $\angle LOC = 2\angle LKC = 2\alpha \implies \angle OCL = 90^\circ - \alpha$ , nes  $\triangle LCO$  lygiašonis. Iš to seka, jog  $\angle OCD = 90^\circ + \alpha$ . Kadangi  $\angle KLC = \angle LAB = \alpha$  ( $LC \parallel BA$ ), tai analogiškai gauname  $\angle BKO = 90^\circ + \alpha$ , kas užbaigia mūsų įrodymą.



□

**Uždavinys 4.** Natūraliajam skaičiui  $n$  egzistuoja tokie racionalieji skaičiai  $a$  ir  $b$ , jog  $a, b$  nėra sveikieji skaičiai, o  $a + b$  ir  $a^n + b^n$  yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad  $n$  negali būti lyginis.

*Sprendimas.* Tegul  $a = \frac{x}{p}$ ,  $b = \frac{y}{q}$ , kur  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $dbd(x, p) = 1$ ,  $dbd(y, q) = 1$  ir  $p, q > 0$ . Iš  $a + b \in \mathbb{Z}$  seka, jog  $pq \mid xq + py$ . Turime, jog  $p \mid xq$ , kadangi  $dbd(x, p) = 1$ , tai  $p \mid q$ . Analogiškai gauname, kad  $q \mid p \implies q = p$ . Tada gauname, jog tenkinamos dvi sąlygos  $p \mid x + y$  ir  $p^n \mid x^n + y^n$ . Tegul  $dbd(x, y) = d$ , kadangi  $dbd(p, d) = 1 \implies p \nmid d$ , tai neprarasdami bendrumo galime tarti, jog  $d = 1$ . Tarkime, jog  $n$  yra lyginis. Tada turime, jog  $x \equiv -y \pmod{p} \implies x^n + y^n \equiv x^n + (-x)^n = 2x^n \equiv 0 \pmod{p}$ . Kadangi  $dbd(x, p) = 1$ , tai  $p \mid 2 \implies p = 2$ . Kadangi  $dbd(x, y) = 1$ , o  $2 \mid x + y$ , tai  $x, y$  yra nelyginiai, vadinasi  $y^n \equiv x^n \equiv (x^2)^{\frac{n}{2}} \equiv 1 \pmod{4}$ . Gauname, jog  $4 \mid 2^n \mid x^n + y^n$ , todėl  $4 \mid 1 + 1$  prieštara. □

*Laikas: 4 val. 30 min.*

*Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.*

*Kiekvienas uždavinys vertas 8 tašky.*

*Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.*