

## 2-oji Lietuvos merginų matematikos olimpiada 2025 m. gruodžio 13 d., Vilnius

**Uždavinys 1.** Yra gerai žinoma, kad bet kokiems teigiamiesiems realiesiems  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ir bet kokiam natūraliajam skaičiui  $n$  galioja nelygybė

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Taip pat žinoma, kad lygybė galioja tada ir tik tada, kai  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Šį faktą galite naudoti šiame uždavinyje.

(a) Įrodykite, kad visiems teigiamiesiems realiesiems skaičiams  $a, b$  ir  $c$  galioja nelygybė  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ . Taip pat nustatykite, kada galioja lygybė.

(b) Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys  $\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a}$ , kai  $a, b$  ir  $c$  yra teigiamieji realieji skaičiai?

*Sprendimas.* (a) Naudokime duotą nelygybę, kai  $n = 3$  ir  $x_1 = \frac{a}{b}, x_2 = \frac{b}{c}, x_3 = \frac{c}{a}$ .

Tada gauname, kad  $\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \frac{b}{c} \frac{c}{a}} = 1$ .

Taigi  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ .

Lygybės atvejis galioja tada ir tik tada, kai  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ . Kadangi šių trijų lygių trupmenų sandauga yra 1, tai kiekviena iš jų lygi 1, taigi  $a = b = c$ .

(b) Perrašykime išraišką sąlygoje kaip

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{2a} + \frac{c}{2a}.$$

Tada, taikydami nelygybę su  $n = 4$ , gauname

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{2a} + \frac{c}{2a} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{a^2}{b} \times \frac{b}{c^2} \times \frac{c}{2a} \times \frac{c}{2a}} = 4 \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Norėdami parodyti, kad  $2\sqrt{2}$  iš tiesų yra mažiausia reikšmė, turime rasti bent vieną  $a, b, c$  reikšmių rinkinį, kuriam išraiška lygi  $2\sqrt{2}$ . Žinome, kad nelygybėje lygybė pasiekama tada ir tik tada, kai visi keturi skaičiai yra lygūs, todėl turime

$$\frac{a^2}{b} = \frac{b}{c^2} = \frac{c}{2a}.$$

Tai yra dvi lygtis su trimis kintamaisiais, tačiau mums nereikia jų tiksliai išspręsti — mes tiesiog ieškome tinkamų  $a, b, c$  reikšmių. Tad tarkime  $a = 1$ ; tuomet lygtis tampa

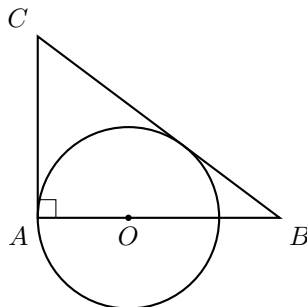
$$\frac{1}{b} = \frac{b}{c^2} = \frac{c}{2}.$$

Padauginę pirmąją lygybę iš  $bc^2$ , gauname  $c^2 = b^2$ , taigi  $c = b$ , kadangi abu  $b$  ir  $c$  yra teigiami. Iš antrosios lygybės gauname  $b = c = \sqrt{2}$ . Galime patikrinti, kad šios reikšmės tikrai tinka:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Todėl ieškomos išraiškos mažiausioji reikšmė yra  $2\sqrt{2}$ . □

**Uždavinys 2.** Duotas trikampis  $ABC$ , kampas  $A$  yra statusis. Duotas natūralusis skaičius  $n > 1$ . Duota, kad  $AB = n^2 - 1$ ,  $AC = 2n$ . Taip pat nubrėžiamas apskritimas (kaip pavaizduota paveikslėlyje), jo centras  $O$  yra ant  $AB$  ir jis liečia tieses  $AC$  bei  $BC$ . Tarkime, šio apskritimo spindulio ilgis yra  $r$ . Raskite visas  $n$  reikšmes, su kuriomis  $r$  yra natūralusis skaičius.



*Sprendimas.* Iš Pitagoro teoremos galime suskaičiuoti  $BC$  ilgį.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = (n^2 - 1)^2 + (2n)^2 = (n^2 + 1)^2, \text{ taigi } BC = n^2 + 1.$$

Pažymėkime apskritimo ir tiesės  $BC$  lietimosi tašką  $F$ . Tada žinoma, kad  $OF$  yra statas  $BC$  (nes  $BC$  - liestinė). Tada  $CF = CA = 2n$ , taigi  $BF = n^2 + 1 - 2n$ . Taip pat  $BO = n^2 - 1 - r$ .

Pritaikykime Pitagoro teoremą trikampiui  $BOF$ :  $(n^2 + 1 - 2n)^2 + r^2 = (n^2 - 1 - r)^2$ .

Šią lygtį galima atskliausti ir supaprastinti, bet galime šiek tiek pagudrauti pritaikę kvadratų skirtumo formulę:  $r^2 = (n^2 - 1 - r)^2 - (n^2 + 1 - 2n)^2 = (2n^2 - 2n - r)(2n - 2 - r)$ , taigi  $r^2 = (2n^2 - 2n)(2n - 2) - r(2n^2 - 2) + r^2$ ,  $2r(n^2 - 1) = 4(n^2 - n)(n - 1)$ , abi puses galime padalinti iš  $2(n - 1)$  (nes  $n > 1$ ), taigi  $r = \frac{2n(n-1)}{n+1}$ .

Kadangi  $r$  - natūralusis, tai skaitiklis turi dalintis iš vardiklio. Bet  $n$  ir  $n + 1$  yra tarpusavyje pirminiai, taigi  $2(n - 1)$  turi dalintis iš  $n + 1$ . Bet akivaizdu, kad padalinus gausime tikrai mažiau nei 2 (nes  $2(n - 1) < 2(n + 1)$ ). Kadangi padalinus turi gautis natūralusis skaičius, o jis mažesnis už 2, tai bus lygus 1, taigi  $2(n - 1) = n + 1$ , taigi  $n = 3$ .

Nesunku patikrinti, kad tada  $r = \frac{2n(n-1)}{n+1} = 4$ .

□

**Uždavinys 3.** Keturi moksleiviai  $A, B, C$  ir  $D$  dalyvavo bėgimo varžybose. Moksleivis  $A$  pasakė, kad jis finišavo pirmas,  $B$  - kad jis finišavo ketvirtas,  $C$  - kad finišavo ne pirmas ir ne ketvirtas, o  $D$  - kad finišavo ne ketvirtas. Žinoma, kad trys moksleiviai sakė tiesą, o vienas - pamelavo. Kuris moksleivis finišavo pirmas, o kuris paskutinis?

*Sprendimas.* Jei  $C$  pamelavo, tai jis finišavo pirmas arba ketvirtas, bet tai reikštų, kad  $A$  arba  $B$  taip pat melavo. Vadinasi, moksleivis  $C$  sakė tiesą. Jei  $D$  pamelavo, tai išeitų, kad ir  $B$  pamelavo, o melagis tik vienas. Taigi moksleivis  $D$  taip pat sakė tiesą. Jei  $B$  būtų pamelavęs, išeitų, kad nė vienas moksleivis nebuvo paskutinis. Vadinasi, moksleivis  $B$  sakė tiesą. Jis varžybose buvo paskutinis. Pirmas finišavo moksleivis  $D$ .

□

**Uždavinys 4.** Triženklis skaičius  $\overline{abc}$  vadinamas *fantastišku*, jei galioja šios sąlygos:

1.  $\overline{abc}$  nesibaigia 0.
2.  $\overline{abc}$  dalinasi iš 36.
3.  $\overline{abc} - \overline{cba}$  yra teigiamas ir dalinasi iš 36.

Raskite visus fantastiškus skaičius.

*Sprendimas.* Iš pirmos sąlygos žinome, kad  $c \neq 0$ . Iš antros sąlygos žinome, kad  $c$  yra lyginis.

$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - b)$ . Tai turi dalintis iš 36, taigi  $a - c$  yra teigiamas ir dalinasi iš 4.

Kadangi  $c$  - lyginis (bet ne 0), o  $a \geq c + 4$ , tai  $c = 2$  arba  $c = 4$ . Atitinkamai,  $a = 6$  arba  $a = 8$ . Kadangi norimas skaičius taip pat dalinasi iš 9, tai  $a + b + c$  dalinasi iš 9, taigi pirmu atveju  $b = 1$ , o antru -  $b = 6$ .

Gauname skaičius 612 ir 864, lengvai patikriname, kad abu atsakymai tinka.

□

*Laikas: 4 val. 00 min.*  
*Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.*  
*Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.*  
*Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.*