

Atranka į RMM 2026

2025 m. gruodžio 17d.

Uždavinys 1. Turime 2025 kortų, ant kiekvienos kortos parašytas kažkoks natūralusis skaičius nuo 1 iki 2025. Skirtingos kortos gali turėti tą patį skaičių, užrašytą ant jų. Raskite visus įmanomus būdus taip surašyti skaičius ant kortų, kad bet kurio netuščio poaibių kortų skaičių suma nesidalintų iš 2026.

Uždavinys 2. Duoti pirminis skaičius $p > 2$ ir natūralusis skaičius n . Įrodykite, kad skaičius pn^2 turi ne daugiau nei vieną tokį teigiamą daliklį d , kad $n^2 + d$ yra natūralaus skaičiaus kvadratas.

Uždavinys 3. Duoti natūralieji skaičiai p, q, n , kur p ir q yra nelyginiai, o $n \geq 2$. Duoti realieji skaičiai $a_1, a_2, \dots, a_n$, tenkinantys $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ ir $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = 2n - 2$. Raskite didžiausią galimą reiškinio

$$(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)(a_1^{p+q} + a_2^{p+q} + \dots + a_n^{p+q})$$

reikšmę.

Uždavinys 4. Duotas trikampis ABC , tiesė l yra tiesės BC vidurio statmuo. D yra taškas ant l . Tiesė, einanti per D taip kerta AB ir AC atitinkamai taškuose P ir Q , kad D yra PQ vidurio taškas. Tegu ω_B ir ω_C yra atitinkamai apie trikampius BDP ir CDQ apibrėžti apskritimai. Apskritimai ω_B ir ω_C kertasi taške $R \neq D$, o tiesė l atitinkamai taškuose X ir Y .

Įrodykite, kad apie trikampį RXY apibrėžtas apskritimas eina per kažkokį fiksuotą tašką, nepriklausomai nuo to, kur pasirenkamas taškas D .

Laikas: 4 val. 30 min.

Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.

Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.

Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.

Atranka į RMM 2026

2025 m. gruodžio 18d.

Uždavinys 1. Duotas įbrėžtinis keturkampis $ABCD$. Tiesės BC ir AD kertasi taške P . Tegu Q yra toks taškas ant BP , $Q \neq B$, kad $PQ = BP$. Taškai R ir S yra tokie, kad $CAQR$ ir $DBCS$ yra lygiagretainiai. Įrodykite, kad apie taškus C, Q, R, S galima apibrėžti apskritimą.

Uždavinys 2. Tegu $a, b, c \geq 1$ yra teigiami realieji skaičiai. Įrodykite nelygybę:

$$a^{(b^c)} + b^{(c^a)} + c^{(a^b)} \geq abc + 2$$

Uždavinys 3. Seka apibrėžta taip: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27$ ir

$$a_{i+4} = \binom{a_{i+3}}{a_{i+2}}(a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i)$$

visiems $i \geq 1$. Įrodykite, kad kiekvienam pirminiui skaičiui egzistuoja kažkoks sekos narys, kuris dalinasi iš to pirminio.

Uždavinys 4. Alisa ir Bobas žaidžia žaidimą ant begalinės šachmatų lentos. Duotas natūralusis skaičius n . Prieš žaidimo pradžią Bobas gali padėti baigtinį skaičių žirgų ant bet kurių langelių šachmatų lentoje. Tada prasideda žaidimas ir abu žaidėjai daro ėjimus paeiliui, pradeda Alisa. Savo ėjimu, Alisa gali užblokuoti daugiausiai n tuščių langelių, kurie kiekvienas turi būti atakuojami bent vieno iš padėtų žirgų. Visi užblokuoti langeliai išlieka užblokuoti viso žaidimo metu. Savo ėjimu, Bobas privalo padėti naują žirgą ant lentos į savo pasirinktą langelį, kuris yra tuščias, neužblokuotas ir atakuojamas bent vieno iš jau padėtų žirgų. Jei Bobas negali padaryti ėjimo, žaidimas pasibaigia ir laimi Alisa. Raskite tokią mažiausią n reikšmę, kad Alisa visada gali laimėti žaidimą su baigtiniu ėjimų skaičiumi, nepriklausomai nuo to, kaip Bobas atlieka ėjimus ir padeda pirmuosius žirgus prieš prasidedant žaidimui.

Pastaba: Žirgas, padėtas ant langelio A atakuoja langelius, kurių centrai yra nutolę nuo langelio A centro per $\sqrt{5}$.

Laikas: 4 val. 30 min.

Laikas klausimams: pirmosios 30 minučių.

Kiekvienas uždavinys vertas 7 taškų.

Leidžiamos tik rašymo ir braižymo priemonės.